

UNIVERSITÀ DI NAPOLI FEDERICO II



FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Dipartimento di Ingegneria dei Materiali e della  
Produzione

Dottorato di ricerca  
in  
Tecnologie di Sistemi di Produzione  
xx ciclo

Resistenza a pressione interna di tubi in composito  
ottenuti per Filament Winding

Tutor:  
Ch.ma Prof.ssa I. De Iorio  
Ch.mo Prof. G. Caprino

Candidata:  
Ing. Concetta Gentile

Coordinatore:  
Ch.mo Prof. G. Giorleo

INTRODUZIONE E SCOPO DELLA TESI .....	5
 CAPITOLO 1.....	10
I MATERIALI COMPOSITI .....	10
INTRODUZIONE .....	10
1.1 Fibre e matrici.....	11
1.2 Il ruolo dell'interfaccia fibra-matrice .....	14
1.3 Criteri di scelta del materiale .....	14
1.4 Processi produttivi .....	15
 CAPITOLO 2.....	23
COMPORTAMENTO MICROMECCANICO DELLA LAMINA .....	23
2.1 Modulo elastico longitudinale .....	24
2.2 Resistenza longitudinale .....	30
2.2.1 Resistenza a trazione in direzione 1 .....	30
2.2.2 Resistenza a compressione in direzione 1.....	35
2.2.3 Instabilizzazione di fase .....	37
2.2.4 Instabilizzazione in opposizione di fase .....	37
2.3 Modulo elastico trasversale.....	40
2.4 Resistenza trasversale .....	42
2.4.1 Resistenza a trazione.....	42
2.5 Modulo di taglio .....	45
2.6 Resistenza a taglio .....	47
2.7 Coefficiente di Poisson.....	48
2.8 Equazione di Halpin – Tsai .....	50
2.9 Coefficienti di dilatazione termica .....	52
 CAPITOLO 3.....	54
COMPORTAMENTO MACROMECCANICO DELLA LAMINA .....	54
INTRODUZIONE .....	54
3.1 Equazione costitutiva della lamina in direzioni arbitrarie .....	54
3.2 Costanti elastiche ingegneristiche della lamina in direzioni arbitrarie .....	58

3.3 Invarianti .....	61
3.4 Resistenza della lamina in direzioni arbitrarie .....	63
3.4.1 Criterio della massima tensione .....	64
3.4.2 Criterio della massima deformazione .....	65
3.4.3 Criteri di Tsai-Hill, Tsai-Wu, Hoffman .....	66
3.5 Equazione costitutiva della lamina .....	67
3.6 Forze e momenti risultanti nel laminato .....	70
3.7 Laminati particolari .....	74
 CAPITOLO 4 .....	 78
APPROCCIO ANALITICO .....	78
4.1 Aspetti generali .....	78
4.2 Resistenza a prima rottura .....	84
4.3 Resistenza a rottura ultima .....	86
4.4 Condizioni di carico agenti nei recipienti in pressione .....	88
4.5 Procedura di dimensionamento dello spessore .....	91
4.6 Procedura di verifica del carico .....	96
4.7 Interfaccia grafica del codice di calcolo .....	100
 CAPITOLO 5 .....	 104
MATERIALI, TECNICHE DI FABBRICAZIONE E DI CARATTERIZZAZIONE .....	104
5.1 Macchina prototipale di <i>Filament Winding</i> .....	104
5.2 Relazioni matematiche per la stesura del programma di avvolgimento .....	107
5.3 Materiali e procedure sperimentali .....	111
5.3.1 Sistema matrice .....	111
5.3.2 Sistema rinforzo .....	114
5.3.3 Tecniche di caratterizzazione .....	115
 CAPITOLO 6 .....	 120
RISULTATI E DISCUSSIONI .....	120
6.1 Correlazione numerico sperimentale .....	120
6.2 Validazione modello teorico .....	124

CONCLUSIONI .....	142
-------------------	-----

<i>Bibliografia</i> .....	144
---------------------------	-----

## INTRODUZIONE E SCOPO DELLA TESI

I materiali compositi presentano, come ampiamente riconosciuto, differenti caratteristiche rispetto ai materiali tradizionali in termini di proprietà specifiche e di criteri di progettazione.

Infatti, mentre nel caso di materiali convenzionali la fase di progettazione prevede il calcolo dei soli spessori necessari a sopportare i cimenti meccanici imposti, per i compositi, invece, data la loro anisotropia, si richiede di selezionare le orientazioni delle fibre di rinforzo e la loro quantità relativa in modo tale da soddisfare i requisiti di progetto: come è ovvio, questo comporta la progettazione del materiale insieme a quella della struttura.

Di conseguenza, i progetti e le metodologie di analisi associati ai materiali compositi, sono compiuti ad un livello più di dettaglio di quanto sia soliti fare con i metalli. Poiché il materiale può essere organizzato in un certo numero di lamine, ognuna con una orientazione specifica, ogni particolare elemento del materiale nella struttura può teoricamente essere progettato in modo ottimale per un certo numero di condizioni del progetto. Numerosi vincoli vengono imposti, però, dal progetto di dettaglio, dalle tecniche di produzione, dalla necessità di ispezioni e dai problemi di manutenzione.

La tecnica di lavorazione sulla quale è stata focalizzata l'attività di ricerca è quella del *filament winding* attraverso la quale sono stati realizzati elementi in composito mediante l'avvolgimento di fibre continue su mandrini di varia forma. Tale tecnologia è estremamente versatile per la molteplicità di geometrie realizzabili mediante il controllo dei parametri di avvolgimento (traslazione, velocità di rotazione, inclinazione, innalzamento e penetrazione della testa di deposizione); in generale è impiegata per realizzare tubi e serbatoi in pressione destinati a diversi scopi.

Le attività di ricerca sono state incentrate sulla realizzazione di tubi assialsimmetrici con angoli di avvolgimento a singola e doppia orientazione. L'aspetto sperimentale è stato poi affiancato a quello analitico attraverso lo sviluppo di una metodologia di calcolo al fine di prevedere le proprietà e il comportamento a rottura di tubi in vetroresina realizzati mediante tale tecnologia. A tal proposito, sono stati studiati

alcuni criteri di resistenza, ritenuti diffusamente idonei per materiali ortotropi, quali quelli di Tsai-Hill, Tsai-Wu e Hoffman basandosi su concetti di Teoria della Laminazione e di macromeccanica della lamina.

Risulta necessario ricordare che la valutazione delle proprietà elastiche dei materiali compositi si basa sull'analisi a diverse scale dimensionali. Partendo, infatti, dalle proprietà del singolo componente omogeneo è possibile prevedere le proprietà meccaniche della struttura finale in composito. Vi sono due approcci possibili, uno macroscopico o macromeccanico e uno microscopico o micromeccanico. La *micromeccanica* si fonda sulla conoscenza delle proprietà ingegneristiche delle fibre e della matrice. Essa costituisce dunque l'anello di congiungimento tra l'analisi ingegneristica e le teorie molecolari. La forma più semplice di rappresentazione di un composito avanzato è la lamina monodirezionale formata da fibre continue orientate in modo parallelo, legate intimamente da una matrice. Quando sono note le proprietà di questo elemento strutturale di base è possibile calcolare le proprietà di un laminato con un numero ed un orientamento a piacere di queste lamine. Per la sua struttura la lamina risulta, a livello microscopico, disomogenea e anisotropa, essendo costituita, come si è detto da fibre unidirezionali legate da una matrice. Tuttavia, se il volume utilizzato nella sperimentazione è molto grande rispetto al diametro delle fibre e agli spessori di matrice intercalati, tale disomogeneità è influente sulle proprietà delle lamine, che dipendono quindi unicamente dall'anisotropia della struttura.

L'analisi *macromeccanica*, invece, ignora la microstruttura dello strato e lo considera omogeneo ma con proprietà differenti nella direzione corrispondente all'orientamento delle fibre e in quella ad esso ortogonale. L'intero elemento strutturale viene quindi concepito come una sequenza di lamine diversamente orientate. Una volta definite le condizioni ai limiti sull'elemento strutturale da costruire si può fare ricorso alla teoria della laminazione per definire la ripartizione degli sforzi nei singoli strati e, di conseguenza, l'orientamento delle singole lamine in relazione alle condizioni di sollecitazione cui sarà sottoposta la struttura. Evidentemente la presenza di difetti nell'elemento base (la monolamina), come ad esempio l'imperfetto allineamento o la frammentazione di fibre, la presenza di inclusioni d'aria o la disomogeneità di reticolazione nella matrice, possono

determinare scostamenti anche sensibili nel progetto della struttura ed essere quindi causa del suo cedimento in condizioni operative. Ne consegue che lo studio delle caratteristiche microstrutturali dei materiali utilizzati nella produzione di una struttura in composito (lamina) è importante almeno quanto la sua progettazione.

Il danneggiamento dei laminati compositi è stato studiato come combinazione di due modi di rottura fondamentali: fratture della matrice e fratture delle fibre che iniziano e si sviluppano in tempi e con modalità dipendenti dagli angoli di avvolgimento della fibre e dalla storia dei carichi durante l'esercizio.

Occorre sottolineare che raramente la rottura di una lamina comporta il cedimento ultimo dell'intero laminato. Più spesso, dopo la prima rottura si verifica una perdita di rigidità, ma l'incremento di carico sopportabile prima della rottura ultima è spesso considerevole. Poiché la prima rottura pregiudica però l'integrità strutturale, questo evento può essere considerato, nel caso di recipienti in pressione, come quello critico nella fase di dimensionamento, in quanto dà luogo a perdite di fluido attraverso la parete.

La letteratura propone numerosi criteri di resistenza, simili a quelli impiegati nel campo dei materiali isotropi, che possono essere suddivisi in due grandi categorie: criteri di tipo non interattivo e criteri di tipo interattivo. La differenza fra i due tipi di criteri consiste nel fatto che, nel primo caso, la previsione che la rottura avvenga in una certa direzione è affidata alla sola conoscenza dello stato di sollecitazione (deformazione) lungo la direzione considerata; si suppone quindi che le sollecitazioni (deformazione) in direzioni differenti da quella analizzata non collaborino nell'influenzare la rottura. I criteri di tipo interattivo partono invece dal presupposto che la conoscenza dell'intero stato di sollecitazione (deformazione) sia necessaria per un giudizio sulla possibilità di rottura.

Come precedentemente sottolineato, il verificarsi della prima rottura in un laminato generico non comporta necessariamente la crisi generale della struttura. Poiché le fibre sono ancora integre, il composito subisce una perdita di modulo più o meno evidente, ma continua a sopportare carico addizionale. Il carico di rottura ultimo può essere notevolmente più elevato di quello di prima rottura.

In tutti i casi in cui la prima fessurazione della matrice non comporta una perdita di funzionalità della struttura si registra quindi la necessità di prevedere il

comportamento del materiale dopo la prima rottura e in particolare il valore della sollecitazione che ne induce la crisi irreversibile. In letteratura sono prevalentemente applicati due metodi, rispettivamente indicati nel seguito come “*metodo dell’eliminazione completa*” e “*metodo dell’eliminazione parziale*”, per la previsione della resistenza ultima di un laminato. Entrambi utilizzano la teoria della laminazione anche dopo il primo cedimento, modellando però in maniera differente il comportamento delle lamine rotte. Il laminato è trattato come un materiale omogeneo, le cui proprietà elastiche vengono calcolate con la teoria della laminazione.

Quest’ultima è impiegata per il calcolo delle sollecitazioni nelle differenti lamine, in accordo alle procedure richiamate precedentemente in questa relazione.

Viene applicato a tutte le lamine un opportuno criterio di resistenza per determinare la lamina che cederà per prima e il carico critico per questo evento.

Al di là di questo punto i due metodi tengono conto della rottura in modo differente.

Nel metodo dell’eliminazione completa, una volta verificata la rottura di una lamina, si suppone che tale lamina non contribuisca ulteriormente alle proprietà elastiche del laminato. Per simulare questo comportamento, tutte le costanti elastiche della lamina rotta vengono azzerate.

Il metodo dell’eliminazione parziale vuole invece tener conto del fatto che, se si verifica una rottura nella matrice, le fibre continuano comunque a collaborare alla rigidità globale. Quest’ultima metodologia è stata quella adottata per lo sviluppo del modello numerico utilizzato nel presente lavoro, grazie alla quale il laminato, dopo la prima rottura, viene considerato come un nuovo laminato, anch’esso a comportamento elastico lineare, di rigidezza ridotta, e viene re analizzato attraverso la teoria della laminazione per la ricerca delle condizioni di rottura successive.



Il lavoro di tesi è stato organizzato come segue.

*Capitolo 1:* panoramica circa i materiali compositi con richiami alle varie tecnologie di lavorazione; viene posta maggior attenzione alla tecnologia oggetto di questo studio, il Filament Winding.

*Capitolo 2 e 3:* macromeccanica della lamina ed equazione costitutiva del laminato; vengono illustrate le procedure analitiche a partire dalle quali è stato sviluppato il codice di calcolo numerico in grado di prevedere il comportamento a rottura di tubi in composito.

*Capitolo 4:* interfaccia del codice di calcolo con l'utente; condizioni di input ed analisi degli output.

*Capitolo 5:* illustrazione dei materiali, delle metodologie di produzione e di processo impiegate al fine di caratterizzare macromeccanicamente i laminati realizzati.

*Capitolo 6:* correlazione numerico sperimentale dei risultati ottenuti. Discussioni ed osservazioni.

## CAPITOLO 1

### I MATERIALI COMPOSITI

#### INTRODUZIONE

Si dice composito ogni materiale costituito da due o più fasi chimicamente e fisicamente distinte, tra loro separate da una superficie di interfaccia. Dal gruppo dei materiali compositi in questo contesto verranno considerati solo i polimeri fibrorinforzati a fibre lunghe ovvero continue. Tali materiali, che sono generalmente indicati con la sigla FRP, acronimo di Fiber Reinforced Polymer, sono composti da fibre immerse in una matrice polimerica che funge da legante. Le fibre occupano una percentuale del volume del composito generalmente compresa tra il 50% ed il 65%.

Data l'estrema versatilità di questi materiali, ai prodotti in FRP possono essere assegnate svariate forme in relazione al loro utilizzo. Con essi, infatti, vengono prodotte lamine monodirezionali, laminati costituiti da più lamine monodirezionali sovrapposte, fogli con fibre monodirezionali, tessuti, barre, trecce, trefoli e reti.

Nei prodotti in FRP, le fibre e la matrice svolgono due distinte funzioni che interagiscono tra di loro: le fibre resistono alle sollecitazioni, mentre la matrice distribuisce in modo omogeneo la tensione dalla superficie esterna alla zona interna ed internamente tra le varie fibre. Inoltre essa ha la funzione di proteggere quest'ultime dalle azioni di tipo meccanico e/o chimico che potrebbero danneggiarle. A causa della differenza tra le caratteristiche meccaniche di fibra e matrice, un prodotto in FRP ha sempre comportamento meccanico anisotropo; in particolare le caratteristiche meccaniche sono molto più elevate nella direzione delle fibre rispetto alla direzione ortogonale ad esse.

L'aspetto più affascinante di questi materiali è senza dubbio la possibilità di

progettare le caratteristiche meccaniche. In tal senso, nella realizzazione di un prodotto in FRP esistono molti gradi di libertà quali il tipo o i tipi di fibre, il tipo di matrice, i rapporti quantitativi reciproci tra i componenti, le direzioni delle fibre ed il trattamento superficiale. Variando tali parametri è possibile fare variare entro limiti piuttosto ampi le caratteristiche meccaniche del prodotto e quindi conferire ad esso le proprietà più idonee per la sua utilizzazione. Questo cambia radicalmente l'approccio progettuale così che, invece di partire dalle caratteristiche meccaniche dei materiali per identificarne l'utilizzazione più idonea, si può partire dai requisiti prestazionali richiesti per giungere alla realizzazione di un materiale che meglio li soddisfi.

## 1.1 FIBRE E MATRICI

Il punto di partenza nel progetto di un materiale composito per una specifica applicazione è la fibra utilizzata come rinforzo dell'elemento (Figura 1.1a).

Commercialmente si possono reperire vari tipi di fibre ciascuna adatta per specifiche esigenze di progettazione; quelle maggiormente utilizzate sono di carbonio, aramidiche, di vetro e di PVA.

Le fibre di carbonio (fibre inorganiche) sono ottenute a partire da poliacrilonite (PAN), rayon e bitumi; le fibre aramidiche (fibre organiche) dalla lavorazione delle poliammidi aromatiche; le fibre di vetro dalla fusione di ossidi di calcio, di silicio, di magnesio e di boro; ed infine le fibre di PVA dall'acetato polivinilico.

Le caratteristiche meccaniche di queste fibre sono: alta resistenza a trazione, basso rilassamento meccanico, stabilità chimico-fisica a temperatura ambiente; esse inoltre a differenza dell'acciaio non mostrano nessun fenomeno di snervamento, avendo un comportamento elastico fino a rottura. La resistenza a taglio di queste fibre è relativamente bassa, pari a circa il 5% di quella a trazione. Alcune caratteristiche meccaniche delle fibre citate sono riportate nella tabella 1.1.

Le elevate caratteristiche meccaniche delle fibre possono essere sfruttate grazie al loro inserimento in una fase continua, detta matrice. Le matrici maggiormente utilizzate nella fabbricazione dei compositi a fibre lunghe sono costituite da polimeri termoindurenti, quali le resine poliestere non sature, le resine epossidiche e le resine fenoliche (Figura 1.1b). Alcune caratteristiche delle matrici citate sono riportate in tabella 1.2.

Tabella 1.1 – Caratteristiche di massima delle fibre

FIBRA	MOD. YOUNG (GPa)	CARICO ROTT. (MPa)
Vetro E	70	3000
Vetro S	80	4000
Carbonio HM	385	2000
Carbonio HS	200	2500
Boro	420	2400
Acciaio	210	2500
Berillio	315	1300
Tungsteno	350	2500
Kevlar 49	120	2200
Carb. di silicio	430	2500

Tabella 1.2 - Alcune caratteristiche dei polimeri termoindurenti

POLIMERO	RESISTENZA A TRAZIONE (MPa)	MODULO ELASTICO (GPa)	COEFF. DIL. TERMICA ( $\times 10^{-6}^{\circ}\text{C}$ )
poliestere non saturo	34÷104	2÷4.4	55÷100
resina epossidica	55÷130	2.7÷4.0	45÷65
resine fenoliche	50÷55	3	45÷110



Figura 1.1a - Rotoli di fibre



Figura 1.1b - Matrice

Per indicare i diversi tipi di FRP si fa riferimento al tipo di fibre in essi contenuto. Comunemente la simbologia adottata è la seguente:

- CFRP: composito con fibre di carbonio;
- AFRP: composito con fibre aramidiche;
- GFRP: composito con fibre di vetro (glass);
- VFRP: composito con fibre di PVA.

Nella tabella 1.3 sono riportate alcune caratteristiche meccaniche di alcuni compositi plastici nella direzione delle fibre. Tali caratteristiche vanno intese come di larga massima.

Tabella 1.3 – Caratteristiche meccaniche degli FRP nella direzione delle fibre

MATERIALE	MOD. YOUNG SPECIF. (GPa)	CARICO ROTT. (MPa)	PESO (g/m <sup>3</sup> x 10 <sup>6</sup> )
Vetro-epoxy	45	1000-1500	1.8
Grafite-epoxy	110-200	900-1400	1.6
Boro-epoxy	220	1000-1300	2.0
Kevlar 49-epoxy	85	1000-1200	1.4

## 1.2 IL RUOLO DELL'INTERFACCIA FIBRA-MATRICE

La superficie o, per meglio dire, l'insieme delle superfici di separazione tra la matrice ed il rinforzo in un composito viene detta interfaccia. Le sue caratteristiche vengono rigorosamente controllate per ottenere le proprietà desiderate da una determinata giunzione di due materiali.

Se l'interfaccia risulta fragile difatti, la deformazione del composito nel suo insieme si propaga attraverso la matrice fino ad incontrare la fibra, ma, invece di permettere alla cricca di continuare attraverso la fibra stessa, spinge il rinforzo ad uscire da una delle due parti del fronte di avanzamento della cricca.

Questo fenomeno non deve tuttavia essere inteso come puramente negativo; esso viene anzi sfruttato, e quindi indotto appositamente in determinate situazioni, semplicemente facendo dall'interfaccia fibra-matrice il punto meccanicamente più debole dell'intero composito.

L'utilità di questa logica di fabbricazione la si nota laddove si richieda all'interno stesso del composito una massimizzazione della dissipazione di energia di fronte a situazioni di danneggiamento per impatto, allo scopo di preservare quanto più possibile le zone vitali del manufatto, fatto sempre più frequente nell'industria automobilistica.

Va tenuto presente che le prime sollecitazioni importanti sul composito si traducono di regola in danneggiamenti dell'interfaccia.

Un'altra filosofia costruttiva tende invece a rafforzare l'accoppiamento fibra-matrice, specie nel caso in cui lo scopo principale sia la conservazione per lungo tempo delle originarie proprietà strutturali del composito.

Solo un buon accoppiamento interfacciale può permettere realmente alle tensioni di trasmettersi alle fibre di rinforzo immerse nella matrice.

Tecnicamente, questo si realizza bagnando il rinforzo con la matrice quando essa sia allo stato fuso od in un altro stato di bassa viscosità.

## 1.3 CRITERI DI SCELTA DEL MATERIALE

Per iniziare, un sistema fibra-resina dovrebbe essere innanzitutto scelto per riscontrare in esso i requisiti di progettazione.

Vanno fatte considerazioni sulla resistenza specifica delle fibre a trazione, sulla loro rigidità, oltre che sul costo e sulla lavorabilità industriale.

Per la resina va anche considerata la sua capacità di sopportare i carichi del composito per cui si richiede preliminarmente di conoscere se, ed in quale misura, le sollecitazioni siano trasmesse a trazione, compressione, torsione o flessione.

Tuttora sono predominanti i compositi a matrice termoindurente, che, poiché i legami tra le varie catene polimeriche della resina bloccano la struttura molecolare in una rigida rete tridimensionale, non possono fondere, ma si decompongono ad elevata temperatura.

Tali resine nascono in stato monomero od oligomero, caratterizzato da una viscosità piuttosto bassa, e questo consente pronta impregnazione delle fibre e malleabilità in forme complesse, ed è un mezzo per ottenere strutture a fibre incrociate di grande resistenza e rigidità con processi (curing) sulla matrice analoghi alla vulcanizzazione delle gomme.

Tuttavia vanno diffondendosi anche le resine termoplastiche, che invece fondono, non essendovi presenti i suddetti legami tra le varie catene polimeriche, ma di maggior costo e di più difficile lavorazione: tra di esse ad esempio il PEEK, polietereeterchetone, il PPS, polifenilensolfuro e la polietereimmide (PEI), particolarmente adatte per usi ad alta temperatura.

Comunque il fattore specifico che può spingere verso l'uso di un materiale oppure di un altro nel caso di recipienti a pressione è l'aumentata quantità PV/W (pressione per volume fratto peso) di un recipiente rispetto ad un altro.

#### 1.4 PROCESSI PRODUTTIVI

I principali fattori che influenzano la scelta del processo produttivo di un materiale composito sono la forma del manufatto, la forma e l'orientamento delle fibre ed il tipo di polimero costituente la matrice (termoplastico o termoindurente). Con le resine termoindurenti, infatti, la costituzione stessa del materiale avviene contemporaneamente al conferimento della forma al manufatto; con le resine termoplastiche, invece, il conferimento della forma avviene in un secondo tempo rispetto alla costituzione del materiale.

Nel seguito si riporta un breve cenno dei principali processi di fabbricazione [1] dei compositi aventi matrice costituita da resina termoindurente, soffermandosi maggiormente sul *Filament Winding*, processo oggetto di questo lavoro.

- PROCESSO DI STRATIFICAZIONE

Su uno stampo avente la forma del manufatto vengono preventivamente applicati agenti che ne impediscano l'incollaggio con il manufatto stesso ed atti a conferire la desiderata finitura superficiale. Successivamente vengono applicati strati alterni di resina e di fibre in accordo con gli spessori e gli orientamenti di progetto. Per una buona consolidazione dell'elemento si usa, ad intervalli regolari di tempo, un rullo in modo da espellere il massimo quantitativo d'aria intrappolata all'interno. Infine, la resina viene lasciata indurire ed il manufatto è rimosso dallo stampo.

Il processo di stratificazione così descritto, può essere manuale (ovvero le fibre vengono disposte manualmente e la resina viene spalmata per mezzo di rulli) o automatico (ovvero le fibre e la resina vengono disposte da un braccio telescopico).

- STAMPAGGI IN SACCO

Una variante del processo di stratificazione su descritto è lo stampaggio in sacco. Dopo che su uno stampo sono stati disposti gli strati di matrice e di fibre fino al raggiungimento dello spessore desiderato, si posizionerà sul pezzo un sacco di gomma sintetica. Tra il sacco ed il manufatto viene creato il vuoto al fine di compattare i componenti del composito e di eliminare le bolle d'aria.

- PROCESSO D'INTRECCIO (BRAIDING)

Questa tecnologia è una delle più antiche fra quelle utilizzate per la realizzazione dei compositi e consiste nell'intreccio di due o più fibre. Il processo consente di intrecciare le fibre in vari modi, al fine di ottenere tessuti bidimensionali o anche manufatti più complessi. Le fibre possono essere intrecciate secche, nel qual caso il tessuto dovrà essere successivamente impregnato in un bagno di resina, oppure possono essere bagnate con la resina subito prima dell'intreccio. Naturalmente nel secondo caso si ottiene una migliore penetrazione della resina negli spazi tra le fibre. Il vantaggio del processo consiste in una migliore resistenza all'impatto e allo sfilamento grazie all'intreccio dei fili.

- PROCESSO DI PULTRUSIONE (PULTRUSION)

La pultrusione è un processo produttivo automatizzato per la produzione in continuo di profili a sezione costante in materiale composito. Le fibre vengono trascinate attraverso un bagno di resina liquida avente lo scopo di impregnarle; successivamente le fibre così impregnate attraversano uno stampo che conferisce loro



la forma desiderata; infine giungono in una camera riscaldata che ha la funzione sia d'indurire la resina sia di consentire la rifinitura del manufatto. L'etimologia della parola pultrusione da il senso del processo produttivo: pull (tirare, trascinare) ed extrusion (estrusione), quindi estrusione per trascinamento. Il processo di pultrusione è un metodo di manifattura che mette insieme resistenza del materiale ed economicità di produzione. Con questa metodologia possono essere sezioni sia aperte che chiuse, singole o multicellulari.

- IL PROCESSO DI FILAMENT WINDING

Il *Filament Winding* è un processo in cui fibre continue, impregnate di resina, vengono avvolte su di un supporto che può essere cilindrico, circolare o di qualsiasi altra forma [2] che non presenti curvature rientranti.

In figura 1.2 viene mostrato in maniera schematica il percorso che la fibra continua segue a partire dalla roccettiera dalla quale, un numero eventualmente variabile di fili, convergono verso una vasca di impregnazione contenente resina non curata e successivamente vengono avvolti sulla superficie di un mandrino rotante.

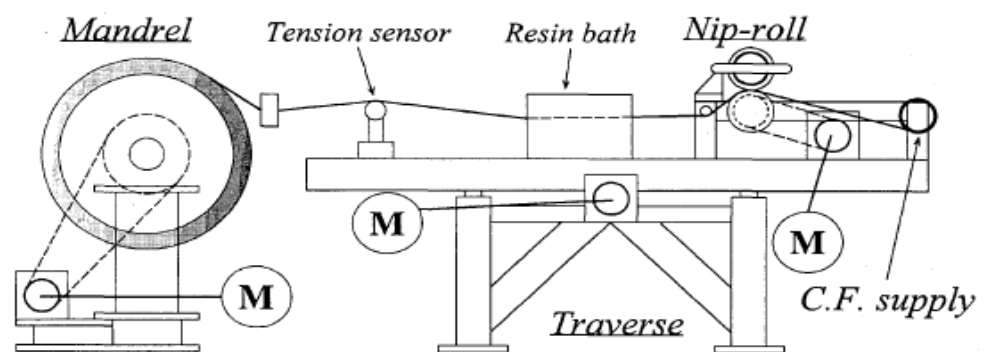


Figura 1.2 - Schematizzazione del processo

La combinazione di tale rotazione con lo spostamento della vasca di impregnazione permette la deposizione della fibra impregnata su tutta la superficie del mandrino e la totale copertura dello stesso compiendo angoli di avvolgimento compresi tra i  $10^\circ$  e i  $90^\circ$  [3]. Terminata la fase di avvolgimento, l'insieme mandrino-pezzo viene riscaldato per portare a termine il processo di cura della resina. Tale tecnica ha la capacità di variare la tensione di avvolgimento delle fibre, l'angolo di avvolgimento e il contenuto di resina in relazione al desiderato spessore del manufatto finale. La

scelta di prepreg o di fibre continue impregnate in un bagno di resina è dettata dalle esigenze costruttive del composito. I vantaggi e gli svantaggi dell'uno o dell'altro vengono riassunti nella tabella 1.3. Il mandrino, prima che su di esso abbia inizio l'avvolgimento delle fibre, viene ricoperto di una patina di *gel coat*, resina impiegata come distaccante che viene impiegata per consentire l'estrazione dei particolari dal mandrino.

Il *gel coat* presenta tensione superficiale molto bassa in modo da diffondersi completamente sulle superfici da trattare.

Il vantaggio principale di questo tipo di distaccante è che consente, se correttamente applicato, un numero molto elevato di processi di avvolgimento per cui viene anche classificato come distaccante permanente o semipermanente.

L'uso di un film adesivo al posto della resina di *gel coat* risulta più adatto.

Questo provvede un controllo dello spessore dell'adesivo in modo che non alteri le proprietà degli strati più esterni della resina del composito, anche se i costi possono essere proibitivi. Nel caso di mandrini smontabili, il *gel coat* è designato ad essere una barriera flessibile per prevenire il distacco anche in presenza di bassi stati tensionali.

Il processo di fabbricazione dipende dal tipo di manufatto che si deve realizzare ed è funzione della geometria del pezzo, del peso e della disponibilità delle attrezzature per l'avvolgimento.

Molte delle macchine in uso per l'avvolgimento sono controllate numericamente in modo da poter controllare l'orientazione delle fibre e il loro reciproco posizionamento durante l'avvolgimento.

Durante il processo, le fibre spostandosi possono causare un cambio della tensione che agisce su di esse e della loro posizione. Per limitare tali effetti viene introdotta una tensione alle rocchettiere.

Sono previsti dispositivi di tensionamento che controllano i livelli di tensione, adeguandola facilmente, in modo da prevenire l'allentarsi delle fibre e una distribuzione non uniforme della tensione sulla rocchettiera.

Il dispositivo di tensionamento include freni magnetici o per attrito, riavvolgimenti elettronici o cesoie rotanti che ostacolano lo svolgimento delle fibre dalla rocchettiera.

Dalla Figura 1.3 si evince che il più importante vantaggio del *Filament Winding* è il costo, che risulta essere notevolmente minore rispetto agli altri metodi di

fabbricazione.



Figura 1.3

La riduzione dei costi è dovuta anche all'elevata velocità con cui vengono deposte le fibre.

I vantaggi che il *Filament Winding* presenta possono essere sintetizzati in:

- elevata natura ripetitiva della deposizione delle fibre
- possibilità di usare fibre continue
- facilità di deporre le fibre in ogni direzione
- la cura non avviene in autoclave
- possibilità di realizzare strutture di cospicue dimensioni
- ottenere un'elevata frazione volumetrica di fibre  $V_f$
- minori costi dovuti alla possibilità di non impiegare prepreg, anche se questi ultimi offrono un eccellente controllo sulla qualità e sul contenuto di resina, uniformità e larghezza della fascia deposta costante.

Per contro il *Filament Winding* presenta i seguenti svantaggi:

- le forme devono essere tali da poter rimuovere il mandrino
- impossibilità di avvolgere con curvature inverse
- difficoltà di cambiare la direzione di avvolgimento delle fibre
- si ha bisogno del mandrino che può essere complesso e costoso
- e semplici superfici esterne dei manufatti possono ostacolare

l'aerodinamica

Tali svantaggi sono stati in parte risolti per il fatto che il *Filament Winding* ha aumentato la sua importanza per la diffusa disponibilità di moderne tecniche di automazione.

L'utilizzo di mandrini di sabbia solubili all'acqua, di mandrini in gesso o ancora di mandrini tubolari metallici hanno permesso di poter ottenere manufatti di forma più complessa, data la loro facilità estrattiva.

Tabella 1.3

	<b>Prepreg</b>	<b>Wet winding</b>	<b>Wet rerolled</b>
<b>Compattazione</b>	Migliore	Peggior	Uguale al prepreg
<b>Disponibilità di fibre</b>	Non tutte le fibre sono disponibili	Buona	Buona
<b>Controllo del contenuto di resina</b>	Buona. Velocità e viscosità costante	Velocità e viscosità variano	Peggior. La viscosità varia
<b>Qualità assicurata</b>	Elevata		Peggior
<b>Possibilità di usare sistemi di resina complessa</b>	Sì	Veramente difficile	Difficile
<b>Immagazzinamento</b>	Sì	No	
<b><i>Fibre danneggiate</i></b>	Dipende dall'impregnatore	Può richiedere speciali attrezzature: minori danni potenziali a causa di minori trattamenti	Il trattamento delle fibre è controllato
<b>Costi</b>	Elevati	Minori	Richiedono capitale per l'impregnazione
<b>Cura a temperatura ambiente</b>	Non è possibile	Possibile	Possibile
<b>Velocità di avvolgimento</b>	Può essere elevata, la fuoriuscita della resina dalle fibre è minimizzata	Minore	Intermedia

Il processo di *Filament Winding* può esser generalmente classificato in base alle tecnica di avvolgimento delle fibre sul mandrino; si distinguono:

- la tecnica di avvolgimento *ad elica*
- la tecnica ad avvolgimento polare

La tecnica di avvolgimento ad elica prevede che la banda della fibra sia alimentata attraverso un carrello da una testa di distribuzione che trasla longitudinalmente rispetto all'asse di rotazione del mandrino.

L'angolo di avvolgimento è determinato dal rapporto tra le due velocità.

Non appena il carrello, nel suo moto traslatorio, raggiunge l'estremità del mandrino rallenta, si arresta e cambia direzione, continuando ad avvolgere la fibra sul mandrino con angolo, questa volta, negativo come si vede in Figura 1.4

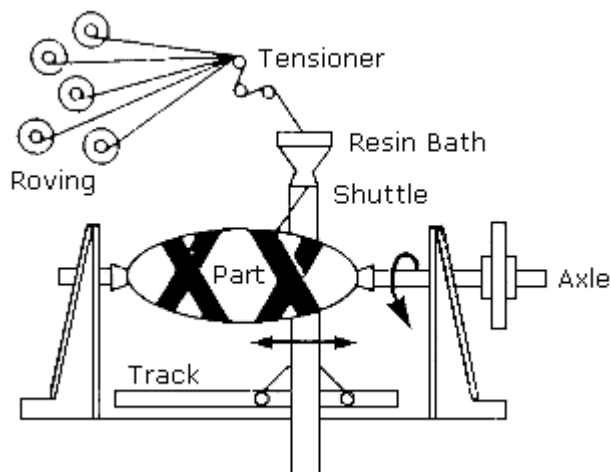


Figura 1.4 - Avvolgimento elicoidale

L'avvolgimento ad elica è la tecnica maggiormente impiegata. E' particolarmente indicata per la realizzazione di geometrie allungate e snelle, come tubi in pressione e condotti per il lancio di missili dove sono necessari angoli di avvolgimento compresi nel range  $20^\circ \div 90^\circ$ .

La maggior parte dei tubi è realizzata avvolgendo il filamento con un angolo di  $54.7^\circ$ . Tale scelta deriva da considerazioni teoriche e assume una distribuzione del campo di stress di 2:1 tra le direzioni circonferenziali e quelle longitudinali in un recipiente cilindrico in pressione. In realizzazioni condotte con tecnica elicoidale vengono evitati gli angoli di avvolgimento molto bassi ( $0-10^\circ$ ), soprattutto nel caso di geometrie caratterizzate da grandi rapporti tra lunghezza e diametro del prodotto: tali angoli sono difficili da controllare in fase di inversione del moto del carrello di

distribuzione alle estremità del mandrino.

Comunque, nelle grandi strutture (con rapporti tra lunghezza e diametro di 2:1 o maggiori), bassi angoli di avvolgimento sono necessari per assorbire gli stress normali.

Nel processo di *Filament Winding* che prevede la tecnica di avvolgimento polare delle fibre impregnate, un'unità di distribuzione corre, percorrendo orbite polari, intorno ad un mandrino in lenta rotazione; il sistema di distribuzione delle fibre ruota in un piano singolo mentre il mandrino ruota così come mostrato in Figura 1.5

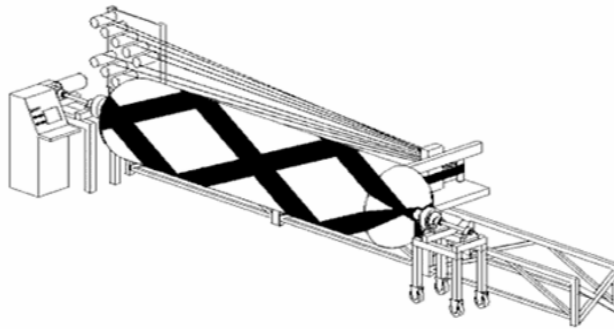


Figura 1.5 – Avvolgimento polare

Il risultato che si ottiene è un doppio strato di fibre disposte ad angoli con orientazione di  $\pm\beta$ . Il mandrino è di solito disposto in posizione verticale e supportato alla base.

Di conseguenza, mandrini molto grandi possono esser supportati senza dar luogo a pericolose incurvatures. Al contrario degli avvolgimenti elicoidali, quelli con tecnica polare favoriscono angoli di avvolgimento molto bassi.

## CAPITOLO 2 COMPORTAMENTO MICROMECCANICO DELLA LAMINA

Per la sua stessa costituzione, una lamina a fibre continue unidirezionali può essere considerata trasversalmente isotropa; essa ha, infatti, caratteristiche di isotropia elastica nel piano 2-3 (Figura 2.1).

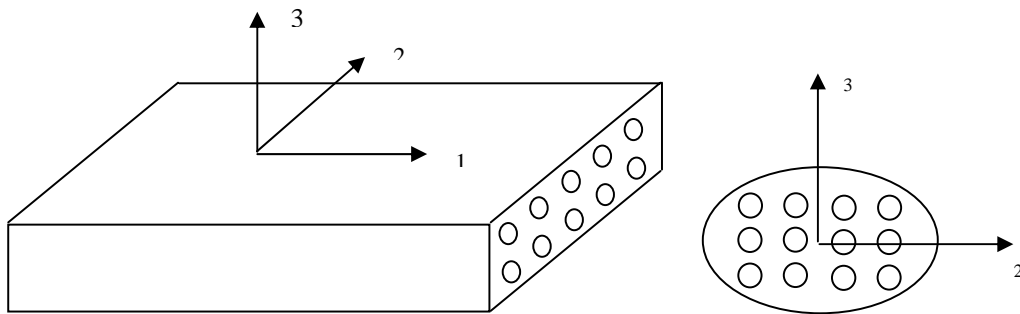


Figura 2.1

Il comportamento di un materiale trasversalmente isotropo in uno stato piano di tensioni<sup>1</sup> è definito dalle quattro cedevolezza:

$$S_{11}, S_{22}, S_{12}, S_{66};$$

o, analogamente, dalle quattro costanti elastiche ingegneristiche:

$$E_{11}, E_{22}, G_{12}, \nu_{12}.$$

Naturalmente, i valori di tali costanti variano in dipendenza dei seguenti parametri:

- Tipo di fibra e di rinforzo
- Tipo di matrice

<sup>1</sup> Lo stato tensionale nel punto P si dice piano se esiste un piano  $\pi$  tale che su ogni giacitura per P, il vettore tensione  $t_n$  è parallelo a  $\pi$ .  $\Pi$  si dice *piano delle tensioni*.

- Quantità percentuale di rinforzo

La via più semplice per ricavare i valori delle costanti occorrenti è quella sperimentale; in tal modo però si otterranno soltanto le costanti relative ad un ben preciso sistema, costituito da un determinato tipo di fibra e matrice, e soprattutto da una certa quantità percentuale di rinforzo.

Non è perciò possibile sapere quale variazione dei moduli bisogna aspettarsi quando, ad esempio, la percentuale di fibre subisce delle variazioni.

In molti casi diventa dunque necessario affrontare il problema dal punto di vista teorico, cercando un legame funzionale tra i moduli della lamina, quelli dei costituenti e la loro percentuale.

A tal fine occorre costruire dei modelli più o meno semplici, che tengano comunque conto dell'esistenza delle due fasi all'interno del composito.

Di conseguenza, il materiale è analizzato dal punto di vista microscopico, nel senso che non si dimentica la sua natura disomogenea. Lo studio dei materiali compositi, basato sulla loro disomogeneità, si dice micromeccanica.

Naturalmente il modulo elastico è una proprietà macroscopica: esso è una media tra i moduli elastici in vari punti del materiale, e tali moduli potranno essere anche molto diversi tra loro; quello che interessa al tecnico è però il comportamento globale del materiale, per cui, dal punto di vista ingegneristico, non è importante vedere il composito come costituito da fasi diverse.

In uno studio di carattere ingegneristico, la lamina è perciò vista come un materiale anisotropo ma omogeneo: quando si trascura la disomogeneità del materiale si entra nel campo della macromeccanica.

Le equazioni derivate da considerazioni di micromeccanica costituiscono il punto di contatto tra la micromeccanica e la macromeccanica; esse si basano, infatti, sulla disomogeneità del materiale, ma forniscono come risultato dei valori tipicamente macromeccanici, quali i moduli e la resistenza della lamina.

## 2.1 MODULO ELASTICO LONGITUDINALE

Nel calcolo del modulo elastico longitudinale  $E_{11}$  (figura 2.2) si fanno le seguenti ipotesi:

- Le fibre hanno tutte lo stesso modulo elastico
- Le fibre hanno una sezione trasversale costante
- Le fibre sono continue e perfettamente parallele



- Esiste una perfetta adesione tra le fibre e la matrice

Dall'ultima ipotesi segue che quando la lamina è sottoposta a trazione in direzione 1 il rinforzo e la matrice subiscono lo stesso allungamento:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_1 \quad (\text{II.1})$$

I pedici “ $f$ ” ed “ $m$ ” si riferiscono rispettivamente alle fibre ed alla matrice.

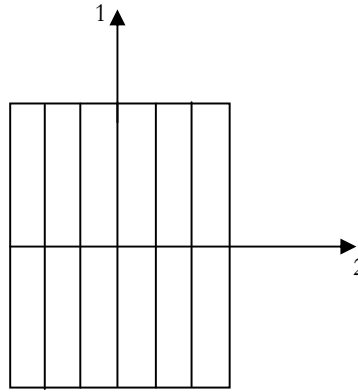


Figura 2.2

Se i due componenti hanno comportamento elastico, risulta:

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f} \quad (\text{II.2a})$$

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E_m} \quad (\text{II.2b})$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_{11}} \quad (\text{II.2c})$$

dove  $\sigma_1$  è la sollecitazione media su una sezione trasversale generica della lamina.

Poiché vale la (II.1), dalle (II.2) si ricava:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_m} = \frac{E_f}{E_m} \quad (\text{II.4})$$

La sollecitazione indotta dalla fibra è dunque tanto maggiore rispetto a quella della matrice, quanto più alto è il rapporto tra i moduli elastici dei due componenti.

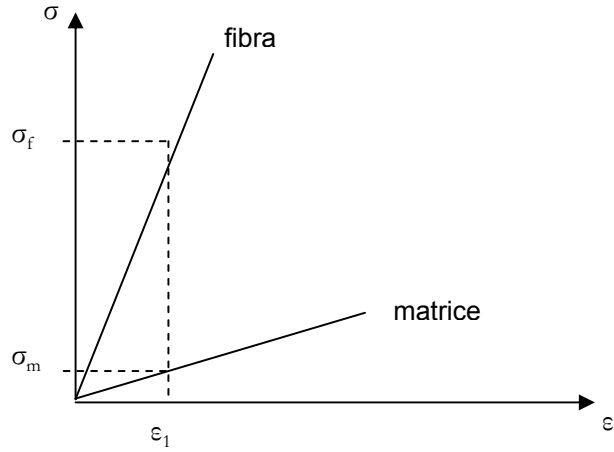


Figura 2.3c

Il carico totale  $P$ , applicato sulla lamina, si divide in due aliquote,  $P_f$  e  $P_m$ , sopportate rispettivamente dalle fibre e dalla matrice.

$$P = P_f + P_m \quad (\text{II.5})$$

D'altra parte risulta:

$$P = \sigma_1 A \quad (\text{II.6})$$

$$P_f = \sigma_f A_f$$

$$P_m = \sigma_m A_m$$

Dove  $A_f$  e  $A_m$  sono le aree occupate dalle fibre e dalla matrice e  $A$  è l'area resistente totale.

Dalle (II.5) e (II.6) si ottiene:

$$\sigma_1 A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \quad (\text{II.7})$$

e tenendo presenti le (II.2) e le (II.3) :

$$\varepsilon_1 E_{11} A = \varepsilon_f E_f A_f + \varepsilon_m E_m A_m \quad (\text{II.8})$$

La (II.8) si semplifica tenendo conto della (II.1):

$$E_{11} A = E_f A_f + E_m A_m \quad (\text{II.9})$$

Le frazioni volumetriche  $V_f$  e  $V_m$  di fibre e matrice di un composito unidirezionale a fibre lunghe possono essere espresse in funzione delle aree:

$$V_f = \frac{A_f}{A} \quad (\text{II.10a})$$

$$V_m = \frac{A_m}{A} \quad (\text{II.10b})$$

Per cui, dalla (II.9) si ricava:

$$E_{11} = E_f V_f + E_m V_m \quad (\text{II.11})$$

Dove, naturalmente

$$V_f + V_m = 1 \quad (\text{II.12})$$

La (II.11) consente di calcolare il modulo elastico longitudinale della lamina in funzione dei moduli elastici delle fasi presenti e della loro percentuale volumetrica. Essa prende il nome di *Legge delle media* o *Regola delle miscele*.

La legge della media fornisce dei risultati molto accurati nella previsione di  $E_{11}$ ; questo indica che le ipotesi poste alla base di questa formula sono sufficienti a descrivere il comportamento elastico della lamina in direzione longitudinale.

In pratica esistono molti elementi che possono differenziare la struttura di una lamina reale da quella teorica assunta.

Per ragioni tecnologiche non è possibile, infatti, garantire la continuità delle fibre di rinforzo dell'intera lamina, esistono perciò dei punti di discontinuità nelle fibre, in quantità e posizione casuale, ed in corrispondenza di essi si stabiliscono delle concentrazioni di sforzi. Inoltre si ha sempre una percentuale di microvuoti che può variare tra l'1% ed il 4%.

L'adesione tra fibra e matrice, poi, non può essere assicurata su tutte le superfici di interfaccia, ed infine la posizione reciproca delle fibre può essere molto differente: in un composito contenente fibre di boro, il diametro delle fibre (circa 0.1mm) è sufficientemente grande da consentire una loro disposizione ordinata all'interno della lamina; infatti, dato che lo spessore della lamina è poco superiore a 0.1mm, esiste una sola fila di fibre.

Lo spessore medio di una fibra (carbonio, vetro o aramidiche (kevlar)) è di  $10\mu\text{m}^2$  per cui ci sono statisticamente 10 fibre lungo lo spessore e la loro posizione reciproca è casuale; alcune fibre sono in contatto tra loro e nelle zone di contatto non si stabilisce un corretto legame interfaccia-matrice.

In ogni caso le fibre sono generalmente inglobate nella matrice, per cui tra le due fasi si generano, sotto carico, delle tensioni trasversali dovute ai differenti moduli elastici.

La legge della media non tiene conto di questi elementi: poiché essa fornisce però dei risultati molto prossimi alla realtà, si deve concludere che l'effetto dei difetti e la

---

<sup>2</sup>  $1\mu\text{m}=10^{-6}\text{m}$

disposizione reciproca delle fibre non influenzano sensibilmente il valore di  $E_{11}$ .

In figura 2.4 è mostrata la variazione di  $E_{11}$  in funzione di  $V_f$  prevista dalla legge della media; naturalmente, da un punto di vista pratico, interesserebbe sfruttare al meglio le caratteristiche di rigidità delle fibre, per cui si tenderebbe a realizzare valori di  $V_f$  vicini ad 1.

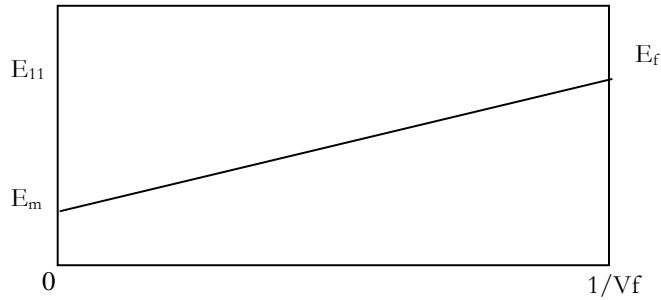


Figura 2.4 - Variazione di  $E_{11}$  in funzione di  $V_f$

Questo valore estremo non può però essere raggiunto neanche teoricamente partendo da fibre a sezione circolare: impacchettate secondo un reticolo esagonale ed a contatto tra loro esse realizzano, infatti, un valore di  $V_f$  uguale a 0.906.

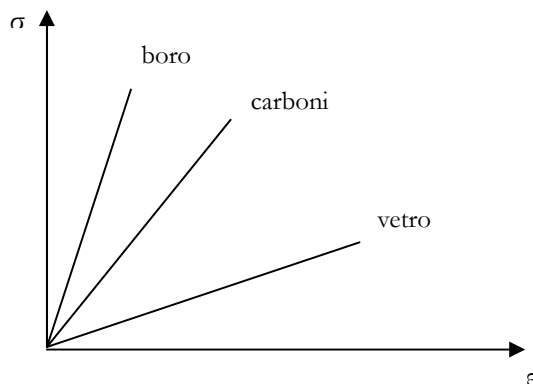
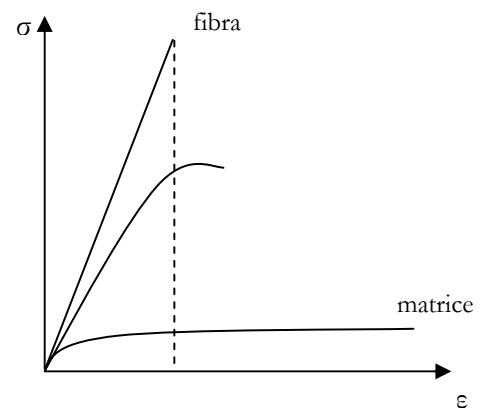
Limitazioni tecnologiche consigliano di non raggiungere in pratica valori di  $V_f$  superiori a 0.7; al di sopra di queste percentuali aumenta enormemente il numero di fibre a contatto, che si danneggiano vicendevolmente e non consentono un buon legame di interfaccia con la matrice. Il limite inferiore di  $V_f$  può essere considerato pari a 0.45.

Per questi valori di  $V_f$ , e tenendo conto dei moduli elastici delle fibre e delle matrici plastiche di interesse tecnico (tabella 2.1), l'apporto della matrice al modulo  $E_{11}$  è trascurabile.

Tabella 2.1 – Moduli di Young per alcune fibre e matrici

MATERIALE	Modulo di Young (Gpa)
<i>FIBRE</i>	
Vetro	87
Carbonio	207
Kevlar	131
Boro	414
<i>MATRICI</i>	
Epossidica	3.4
Poliestere	3.4

Anche il composito unidirezionale dovrebbe risentire nella sua curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  di questa non linearità (figura 2.6); di fatto, quando l'influenza della matrice è trascurabile, lo scostamento reale non è avvertibile, per cui la risposta della lamina ad un carico in direzione 1 può essere senz'altro considerata elastica lineare fino alla rottura.

Figura 2.5 – Curve  $\sigma$ - $\varepsilon$  per alcune fibreFigura 2.6 – Curve  $\sigma$ - $\varepsilon$  di fibra, matrice e composito

## 2.2 RESISTENZA LONGITUDINALE

### 2.2.1 RESISTENZA A TRAZIONE IN DIREZIONE 1

Il modello adottato per il calcolo del modulo  $E_{11}$  può essere usato per la previsione della resistenza a trazione della lamina in direzione 1, aggiungendo l'ipotesi che le fibre di rinforzo abbiano tutte la stessa resistenza.

La (II.7), che in considerazione della (II.10) può assumere la forma:

$$\sigma_1 = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \quad (\text{II.13})$$

può essere adottata come punto di partenza.

Si noti che la (II.13) è stata ottenuta da semplici considerazioni di equilibrio; essa è perciò valida nel caso di comportamento sia lineare che non lineare dei due componenti la lamina e può essere usata insieme alla relazione:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_f = \varepsilon_m \quad (\text{II.1})$$

per la costruzione del diagramma  $\sigma$ - $\varepsilon$  della lamina fino al punto di prima rottura del composito (figura 2.7).

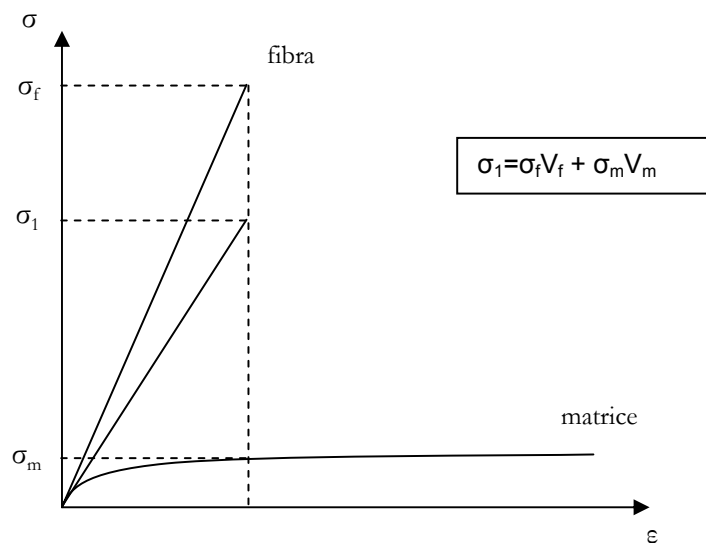


Figura 2.7 - Diagramma  $\sigma$ - $\varepsilon$  della lamina fino al punto di prima rottura del composito

L'individuazione di questo punto (così come l'andamento del diagramma dopo di esso), è legata ad una ipotesi aggiuntiva sulle cause stesse e sulle modalità di rottura.

Le ipotesi più semplici ed intuitivamente evidenti, la cui validità va verificata sperimentalmente, sono le seguenti:

La prima rottura si verifica quando una delle due fasi (fibra o matrice) raggiunge il

suo allungamento massimo; in tali condizioni essa cede, riversando totalmente sull'altra fase l'aliquota di carico che sopportava.

In seguito a ciò la sollecitazione traente applicata sulla fase rimasta integra, subisce un brusco incremento. Se la sollecitazione conseguente è superiore a quella di rottura, il composito cede di schianto; in caso contrario la fase integra continua a sopportare il carico fino al suo punto critico.

I valori tipici di allungamento a rottura delle fibre vanno da circa 0.6% per le fibre di boro a 3.5% per quelle di vetro; le matrici epossidiche o poliestere hanno comunque un allungamento a rottura superiore al 4%.

Poiché le fibre e la matrice subiscono lo stesso allungamento (II.1), secondo le formule esposte, la prima rottura della lamina comporta il cedimento delle fibre e si verifica quando:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{rf} = \frac{\sigma_{rf}}{E_f}$$

dove  $\varepsilon_{rf}$  rappresenta l'allungamento a rottura delle fibre e  $\sigma_{rf}$  la loro resistenza.

La sollecitazione  $\sigma_{1r}^*$  di prima rottura della lamina si ottiene dalla (II.14):

$$\sigma_{1r}^* = \sigma_{rf} V_f + \sigma_m^* V_m \quad (II.14)$$

dove  $\sigma_m^*$  rappresenta la tensione presente nella matrice al momento di rottura delle fibre (Figura 2.8). Ad esempio, si supponga di incrementare la deformazione del composito in direzione delle fibre (direz. 1) fino ad un valore pari a  $\varepsilon_{rf}$ : cedono le fibre, ma ancora resta la matrice (Figura 2.8); se si continua ad incrementare la deformazione la sollecitazione sarà inferiore perché è la sola matrice ad opporre resistenza, e la sollecitazione corrente sarà data dalla:

$$\sigma = \varepsilon E_m V_m = \sigma_m V_m$$

mentre la sollecitazione di rottura sarà

$$\sigma_{1rm} = \sigma_m V_m$$

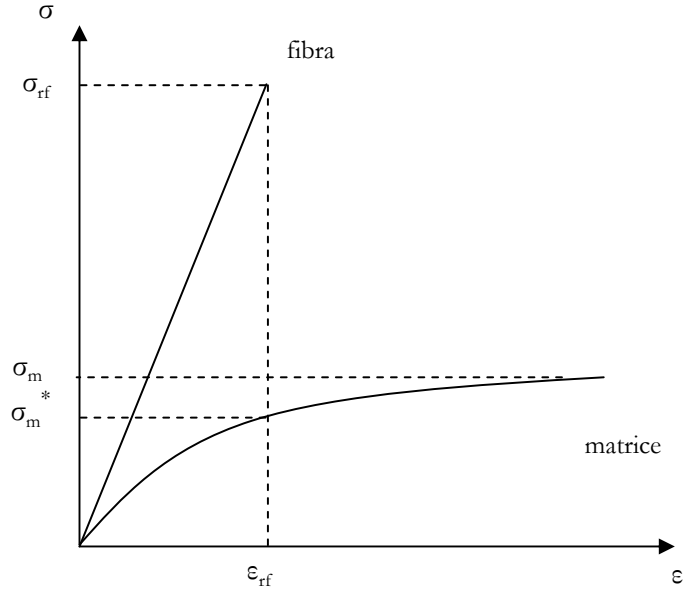


Figura 2.8

Se le fibre sono linearmente elastiche e la matrice lo è almeno finché risulta  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{rf}$ , la (II.14) può assumere la forma :

$$\sigma_{1r}^* = \varepsilon_{rf} (E_f V_f + E_m V_m) = \varepsilon_{rf} E_{11} \quad (II.15)$$

Dopo la rottura delle fibre, l'aliquota di carico che esse sopportavano viene sostenuta dalla sola matrice; la (II.13) diviene allora:

$$\sigma_1' = \sigma_m V_m = \sigma_m (1 - V_f) \quad (II.16)$$

il cedimento finale si ha quando

$$\sigma_m = \sigma_{rm} \quad (II.17)$$

dove  $\sigma_{rm}$  rappresenta la sollecitazione a rottura della matrice.

Dalle relazioni (II.16) e (II.17) si giunge facilmente alla:

$$\sigma_{1r}' = \sigma_{rm} (1 - V_f) \quad (II.18)$$

relazione che esprime il carico di rottura finale del composito.

Le (II.14) e (II.18), che consentono di calcolare le sollecitazioni di primo cedimento e di cedimento ultimo del composito, possono essere così diagrammate, in funzione di  $V_f$  (figura 2.9).



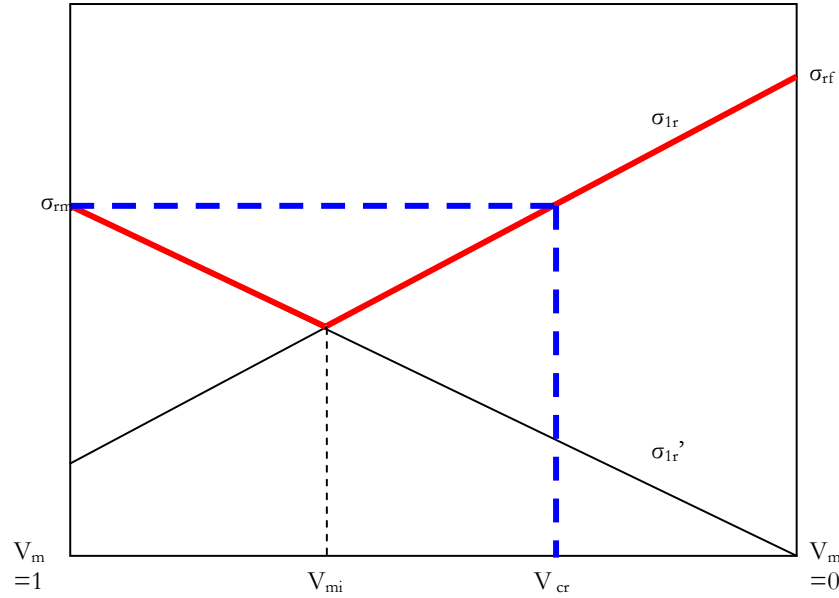


Figura 2.9

Come si vede, esiste un valore  $V_{min}$  al di sotto del quale  $\sigma_{1r^*} < \sigma_{1r'}$  e al di sopra del quale  $\sigma_{1r^*} > \sigma_{1r'}$ .

E' facile verificare che:

$$V_{min} = \frac{\sigma_{rm} - \sigma_m^*}{(\sigma_{rf} + \sigma_{rm}) - \sigma_m^*} \quad (II.19)$$

Un composito con  $V_f < V_{min}$  cede per rottura delle fibre quando la sollecitazione  $\sigma_1$  applicata è pari a  $\sigma_{1r^*}$ , ma continua a sopportare il carico finché risulta vera la relazione  $\sigma_1 = \sigma_{1r'}$ .

Un composito con  $V_f > V_{min}$  cede invece di schianto, verificandosi, la sua rottura finale, per una sollecitazione  $\sigma_{1r} < \sigma_{1r^*}$ ; la sua resistenza a rottura coincide con  $\sigma_{1r^*}$ .

Per quanto detto, è giusto osservare che la rottura di una lamina è perciò rappresentata dalla parte tracciata in rosso nella figura 2.9.

Come si vede, la resistenza del composito resta al di sotto di quella della sola matrice ( $\sigma_{rm}$ ) fin quando non si è raggiunto un valore di  $V_{cr}$  di fibre, dato da:

$$V_{cr} = \frac{\sigma_{rm} - \sigma_m^*}{\sigma_{rf} - \sigma_m^*} \quad (II.20)$$

Per  $V < V_{cr}$  le fibre non esercitano dunque una effettiva funzione di rinforzo, anzi determinano un indebolimento del composito.

Un tale comportamento si spiega in quanto le fibre rappresentano comunque una discontinuità per la matrice, quindi, se esse non sono presenti in quantità tali da

soportare i carichi, si ottiene un materiale meno resistente.

Nelle ipotesi fatte, la rottura della lamina si verifica quando si rompono le fibre; poiché la deformazione a rottura delle fibre è sempre inferiore a quella della matrice, possiamo affermare che è questo il caso che occorre nella realtà.

Nelle situazioni reali appare ovvio che non appena si rompono le fibre, si ha una immediata rottura anche della matrice che non riesce a sopportare i livelli di carico delle fibre.

In ordine di tempo si rompono prima le fibre, quindi la formula da considerare è:

$$\sigma_{rf1} = \sigma_{rf} V_f + \sigma_m V_m$$

Il significato di  $V_{cr}$  è evidente se ci si ricorda che il carico totale applicato sul composito è suddiviso tra fibra e matrice.

Assumendo per semplicità che entrambe le fasi siano linearmente elastiche, dalle (II.6) e (II.10) si giunge facilmente alla relazione:

$$\frac{P_f}{P_m} = \frac{E_f V_f}{E_m V_m}$$

Essa mostra che l'aliquota di carico sopportata dalle fibre e dalla matrice può essere molto diversa.

Durante il processo di fabbricazione del composito, non è possibile controllare l'allineamento delle singole fibre, non tutte sono disposte parallelamente all'interno della matrice; un disallineamento di pochi gradi non influisce molto sulla resistenza del materiale, ma un errore maggiore può ridurla considerevolmente. La natura del legame di interfaccia è fondamentale per il comportamento meccanico del composito; in particolare la resistenza trasversale ed al taglio nel piano della lamina sono tanto migliori quanto più efficiente è l'adesione tra fibra e matrice.

Ricordiamo infine che il tipo di legame si riflette in un differente modo di rottura anche sotto carico traente in direzione longitudinale (direz. 1).

Un legame inefficiente si traduce in una rottura fragile con superfici di frattura che si propagano anche nelle direzioni delle fibre (direz. 1); un legame resistente dà luogo ad una rottura fragile con superfici di frattura più nette e localizzate.

Per quanto detto, e tenendo presente che altre cause di riduzione della resistenza a trazione della lamina sono date dalla fragilità delle fibre che tendono a rompersi durante la lavorazione, creando quindi dei vuoti all'interno del composito e dallo stesso processo di produzione del materiale che prevede lavorazione ad elevata temperatura, il che fa insorgere, a causa di differenti coefficienti di dilatazione tra le

due fasi, delle tensioni che inficiano sulla resistenza globale del materiale, la legge della media per il calcolo della resistenza longitudinale a trazione di una lamina fornisce dei risultati solo indicativi, in generale più alti dei valori reali.

Si può notare che i valori calcolati non sono sempre aderenti a quelli misurati; il più delle volte essi sopravvalutano la resistenza del composito. L'imprecisione, come osservato prima, può essere attribuita a vari fattori, trascurati dal modello analitico:

- Danneggiamento delle fibre durante la loro fabbricazione
- Distribuzione statistica della loro resistenza
- Imprecisione nell'allineamento del rinforzo
- Imperfezioni nei legami di intreccio fibra-matrice
- Tensioni residue insorgenti tra fibre e matrice a causa del processo di produzione del composito

In tabella 2.2 sono riportati, per varie lamine in composito plastico, i valori di  $\sigma_{1r}$ . Accanto ai valori misurati, sono mostrati per confronto i valori di  $\sigma_{1r}$  calcolati mediante la (II.14), in cui è stato trascurato il termine relativo alla matrice che, come si è visto, è di scarsa importanza per compositi a matrice plastica con alta percentuale di fibre.

Tabella 2.2 – Valori misurati e calcolati di  $\sigma_{1r}$

COMPOSITO	COSTITUENTI	$V_f$	$\sigma_{1r}$ mis. (MPa)	$\sigma_{1r}$ (MPa)
Vetro/Ep	Vetro S/1009	0.72	1290	3226
Vetro/Ep	Scotchply 1002	0.45	-	-
Gr./Ep	Mod II/5206	0.55	1110	1518
Gr./Ep	T300/5208	0.70	1500	1568
Gr.Ep	Mod I/ERLA 4617	0.45	840	832
Gr./Ep	Mod I/4289	0.50	1120	925
B/Ep	B4/5505	0.50	1260	1725

### **2.2.2 RESISTENZA A COMPRESSIONE IN DIREZIONE 1**

Si consideri una struttura in equilibrio; si supponga che una qualsiasi causa esterna muti la configurazione di equilibrio della struttura.

La stabilità viene definita come la capacità di una struttura di ritornare

<sup>3</sup> Hofer, K.E.; Rao, N. and Larsen, D., "Development of Engineering Data on the Mechanical and Physical Properties of Advanced Composite Materials", AFML-TR-72-205, Parts I and II, 1972 and 1974.

spontaneamente nella situazione di equilibrio originaria al momento in cui cessa l'azione della causa esterna.

Assimilando le fibre di un materiale composito sottoposto a compressione in direzione longitudinale a delle travi caricate di punta, ricordiamo che la snellezza delle travi è definita come il rapporto tra la loro lunghezza e la loro minima dimensione trasversale.

$$K = \frac{L}{D}$$

Dove:

$K$ : snellezza

$L$ : lunghezza

$D$ : minima dimensione trasversale

E' noto dalla Scienza delle Costruzioni<sup>4</sup> che se  $K$  supera un valore limite, la trave giunge a rottura per carico di punta, e quindi di compressione, per un valore inferiore a quello della resistenza a compressione del materiale costituente.

Nel caso della lamina, le fibre possono essere considerate come travi con un elevatissimo valore di  $K$ ; la presenza della matrice interviene ad arginare il fenomeno della instabilità a compressione.

L'uso della legge della media anche in questo caso, possibile in teoria, sarebbe però di difficile attuazione nella pratica, in quanto dovrebbe essere nota la resistenza a compressione delle fibre, ma, per quanto detto, non si hanno dati certi sulla loro modalità di comportamento a compressione.

Rosen<sup>5</sup> ha notato che si possono presentare due modi di instabilizzazione delle fibre nella lamina, come si vede dalla Figura 2.10a e 2.10b:

---

<sup>4</sup> Danoel, I.M. and Liber, T., "Lamination Residual Stress in Fiber Composites", NASA CR-134824, March 1975.

<sup>5</sup> Rosen, B.W., "Tnsile Failure of Fibrous Composites", J. Am. Inst. Aero. Astron., 2, 1985, Nov. 1964.

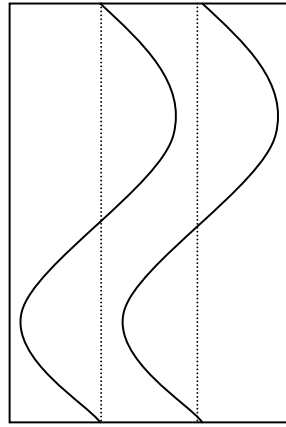


Figura 2.10a

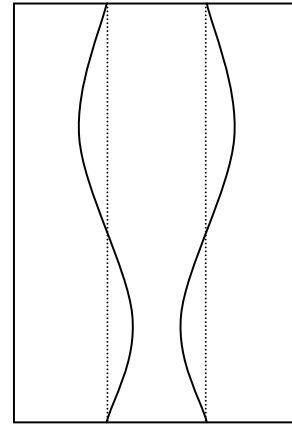


Figura 2.10b

### **2.2.3 INSTABILIZZAZIONE DI FASE**

Le fibre si deformano in modo che la distanza fra di esse rimanga costante; questo caso si verifica quando il composito è realizzato con un alto valore di  $V_f$ . La matrice in questo caso è soggetta essenzialmente ad una deformazione tagliente.

Basandosi su metodi energetici, l'autore ha ricavato la seguente espressione:

$$\sigma^{rc}_1 = \frac{G_m}{1 - V_f}$$

### **2.2.4 INSTABILIZZAZIONE IN OPPOSIZIONE DI FASE**

Le fibre si deformano in modo che siano in opposizione fra loro; questo caso si verifica quando il composito è realizzato con un basso valore di  $V_f$  e la sollecitazione che si desta nella matrice è di trazione in alcune zone e di compressione in altre.

In questo caso ecco la relazione trovata da Rosen:

$$\sigma^{rc}_1 = 2V_f \sqrt{\frac{V_f E_f E_m}{3(1 - V_f)}}$$

Per i compositi normalmente utilizzati ( $V_f > 0.4$ ), il modo di rottura tipico previsto dovrebbe essere quello "in fase".

La teoria esposta, però, predice dei valori esageratamente alti per  $V_f > 0.5$ .

Attribuendo questa anomalia al comportamento non elastico della matrice oltre una certa deformazione, Rosen tiene conto dell'anelasticità della matrice; in questo caso la teoria prevede un certo livellamento dei risultati per elevati valori di  $V_f$ .

Resta comunque il fatto che le formule di Rosen sopravvalutano la resistenza a compressione della lamina.

Un modello tridimensionale, elaborato da Greszezuc<sup>6</sup>, sembra fornire previsioni più aderenti alla realtà.

L'osservazione di Greszezuc<sup>7</sup> e Broutman<sup>8</sup>, in merito ai cedimenti per rottura trasversale del composito, ha permesso l'elaborazione di un nuovo criterio per la previsione della resistenza a compressione longitudinale del composito: la rottura si avrebbe quando la deformazione trasversale  $\varepsilon_2$ , provocata dal carico complessivo, eguaglia quella di rottura  $\varepsilon_{2r}$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{2r} \quad (II.21)$$

Supponendo un comportamento elastico fino a rottura, per la definizione di modulo di Poisson:

$$\begin{aligned} \nu_{12} &= -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \\ E_{11} &= \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \end{aligned} \quad (II.22)$$

per cui

$$\varepsilon_2 = -\nu_{12}\varepsilon_1 = -\nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_{11}} \quad (II.23)$$

A rottura,  $\sigma_1 = \sigma_{1rc}$ , per cui dalle (II.23) e (II.21)

$$\varepsilon_{2r} = -\frac{\sigma_{1r}^c}{E_{11}} \nu_{12} \quad (II.24)$$

da cui si ricava:

$$\sigma_{1r}^c = -\frac{E_{11}\varepsilon_{2r}}{\nu_{12}} \quad (II.25)$$

Nella (II.25) si è implicitamente supposto che il valore  $E_{11}$  del modulo a compressione sia pari a quello che si misura in trazione, cosa ragionevolmente vera per un materiale composito.

Una relazione empirica per il calcolo di  $\varepsilon_{2r}$  è stata proposta da Nielsen:

$$\varepsilon_{2r} = \varepsilon_{rm} (1 - V_f^{1/3}) \quad (II.26)$$

<sup>6</sup> Greszezuc, L.B., "Failure Mechanics of Composites Subjected to Compressive Loading", AMFL-TR-72-107, August 1972.

<sup>7</sup> Greszezuc, L.B., "Compressive Strenght and Failure Mode of Unidirectional Composites", The Test Methods for High Modulus Fiber and Composites, ASTM STP 521, April 1972

<sup>8</sup> Broutman, L.J., "Glass-Resin Point Strenght and Their Effect on Failure Machanism in Reinforced Plastics", Mod. Plst., April 1965

Successivamente mostreremo che anche il modulo di Poisson  $\nu_{12}$ , come  $E_{11}$ , può essere calcolato con la legge della media:

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (II.27)$$

La (II.25) assume quindi la forma:

$$|\sigma_{1r}^c| = \frac{(E_f V_f + E_m V_m)(1 - V_f^{1/3})\varepsilon_{rm}}{\nu_f V_f + \nu_m V_m} \quad (II.28)$$

Tale relazione calcola la resistenza a compressione longitudinale della lamina dovuta a rottura trasversale in trazione.

Le prove di compressione sono però molto delicate ed i dati sperimentali a disposizione sono troppo scarsi per poter accreditare la (II.28). Essa non trova neppure a livello teorico una completa giustificazione, quindi può essere considerata un criterio puramente fenomenologico.

Quindi, per quanto detto, la risposta del composito ad un carico di compressione è influenzato dalla capacità della matrice di impedire l'instabilizzazione delle fibre.

Inoltre, le differenti costanti elastiche che competono alle fasi costituenti il composito fanno sì che, sotto un carico di compressione, tra fibra e matrice si generino sforzi traenti in direzione normale al carico applicato; poiché i compositi a matrice plastica hanno una scarsa resistenza trasversale a trazione, essi potrebbero cedere trasversalmente.

L'esperienza ha mostrato che i fenomeni critici sono l'instabilizzazione e la rottura trasversale; in altre parole le caratteristiche meccaniche della matrice nei compositi di interesse tecnico non sono mai tali da consentire alle fibre di raggiungere il collasso per compressione pura.

In tabella 2.3<sup>9</sup> sono mostrate le resistenze longitudinali a compressione misurate per diversi compositi a matrice plastica. Un confronto con i dati in tabella 2.3 mostra che la  $\sigma_{1rc}$  è in genere più bassa della  $\sigma_{1r}$ .

<sup>9</sup> Hofer, K.E.; Rao, N. and Larsen, D., "Development of Engineering Data on the Mechanical and Physical Properties of Advanced Composite Materials", AFML-TR-72-205, Parts I and II, 1972 and 1974.  
Danoel, I.M. and Liber, T., "Lamination Residual Stress in Fiber Composites", NASA CR-134824, March 1975.

Tabella 2.3 - resistenze longitudinali a compressione misurate per diversi compositi a matrice plastica

COMPOSITO	COSTITUENTI	$V_f$	$\sigma_{1rc}$ (MPa)
Vetro/Ep	Vetro S/1009	0.72	822
Gr./Ep	Mod II/5206	0.55	970
Gr./Ep	T300/5208	0.70	1500
Gr./Ep	Mod I/Erla 4617	0.45	880
Gr./Ep	Mod I/4289	0.50	990
B/Ep	B4/5505	0.50	2500

### 2.3 MODULO ELASTICO TRASVERSALE

Per stimare il modulo elastico trasversale, conviene considerare fibre e matrice come elementi alternati caricati in serie.

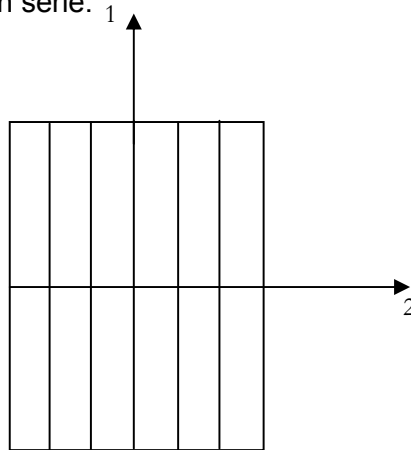


Figura 2.11

L'allungamento totale  $\Delta l_2$  (in direzione 2) è dato da:

$$\Delta l_2 = \Delta l_f + \Delta l_m \quad (\text{II.29})$$

per definizione di allungamento percentuale possiamo scrivere le relazioni

$$\Delta l_2 = \varepsilon_2 l_2 \quad (\text{II.30})$$

$$\Delta l_f = \varepsilon_f l_f$$

$$\Delta l_m = \varepsilon_m l_m$$

Sostituendo le (II.30) nella (II.29) si ottiene



$$\varepsilon_2 l_2 = \varepsilon_f l_f + \varepsilon_m l_m \quad (\text{II.31})$$

Considerando che

$$\frac{l_f}{l_c} = V_f \quad (\text{II.32})$$

$$\frac{l_m}{l_c} = V_m$$

la (II.31) può scriversi come segue:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m V_m \quad (\text{II.33})$$

Poiché gli elementi, come supposto, sono caricati in serie

$$\sigma_c = \sigma_f = \sigma_m$$

e avendo supposto che ci si trova in campo elastico

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_{22}} \quad (\text{II.34a})$$

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f} \quad (\text{II.34b})$$

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E_m} \quad (\text{II.34c})$$

possiamo scrivere dalla (II.30):

$$\frac{1}{E_{22}} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \quad (\text{II.35})$$

che consente il calcolo di  $E_{22}$ .

Osserviamo che mentre il modulo longitudinale è una proprietà dipendente essenzialmente dalle fibre, quello trasversale è fortemente influenzato dalla matrice.

Il modello rappresentato in figura 2.11 è estremamente semplificato; in effetti nella realtà le fibre non lavorano in serie, bensì in serie-parallelo.

Ciò significa che nelle due fasi il carico trasversale non induce le stesse sollecitazioni. Inoltre sono trascurati gli effetti di accoppiamento dovuti ai differenti coefficienti di Poisson.

Hashin<sup>10</sup> propone una formula relativamente semplice che tiene conto degli effetti di Poisson tra fibra e matrice:

<sup>10</sup> Hashin, Z., "theory of Fiber Reinforced Materials", NASA Contract NAS1-8818, November 1970.

$$\frac{1}{E_{22}} = \left( \frac{V_f}{E_f} \right) \frac{1}{V_f + V_m} - V_f V_m \frac{\left( \frac{E_f \nu_m}{2} - E_m \nu_f \right) \left( \frac{\nu_m}{E_m} - \frac{\nu_f}{E_f} \right)}{\left( V_f E_f + V_m E_m \right) \left( V_f + \frac{V_m}{2} \right)}$$

In tabella 2.4<sup>11</sup> sono forniti dei valori sperimentali di modulo trasversale  $E_{22}$  per alcuni tipi di compositi a matrice plastica.

Tabella 2.4 - valori sperimentali di modulo trasversale  $E_{22}$  per alcuni tipi di compositi a matrice plastica

COMPOSITO	COSTITUENTI	$V_f$	$E_{22}$ (GPa)
Vetro/Ep	Vetro S/1009	0.72	24.8
Gr./Ep	Mod II/5206	0.55	8.83
Gr./Ep	T300/5208	0.70	10.3
Gr./Ep	Mod I/Erla 4617	0.45	7.10
Gr./Ep	Mod I/4289	0.50	4.14
B/Ep	B4/5505	0.50	18.5

## 2.4 RESISTENZA TRASVERSALE

### 2.4.1 RESISTENZA A TRAZIONE

La previsione della resistenza trasversale  $\sigma_{2r}$  a trazione di un composito, è un problema molto complesso. La presenza della fase fibrosa provoca, infatti, delle concentrazioni di sforzo nella matrice; inoltre, la distribuzione casuale delle fibre, che per elevati valori di  $V_f$  risultano molto vicine tra loro, è causa di ulteriore complessità del campo tensionale.

Si verifica dunque un'interazione tra campi tensionali che rende difficile un'indagine analitica.

Un'analisi accurata è inoltre impedita dai seguenti fattori:

<sup>11</sup> Hofer, K.E.; Rao, N. and Larsen, D., "Development of Engineering Data on the Mechanical and Physical Properties of Advanced Composite Materials", AFML-TR-72-205, Parts I and II, 1972 and 1974.  
Danoel, I.M. and Liber, T., "Lamination Residual Stress in Fiber Composites", NASA CR-134824, March 1975.

- Presenza di microvuoti, che inducono ulteriori concentrazioni di sforzo;
- Presenza delle superfici di interfaccia fibra-matrice, lungo le quali si può sviluppare preferenzialmente la frattura;
- Presenza di difetti indotti dal processo tecnologico;
- Possibilità di comportamento anisotropo delle fibre che possono avere una resistenza più bassa in direzione trasversale rispetto alla direzione assiale; in questo caso la superficie di frattura può attraversare anche le fibre.

La presenza delle fibre di rinforzo si traduce in una riduzione del carico di rottura sopportabile dalla matrice:

$$\sigma_{2r} = \frac{\sigma_{rm}}{k} \quad (II.37)$$

con  $k > 1$  fattore di proporzionalità che indica la riduzione di resistenza.

E' pensabile che il valore di  $k$  aumenti con la percentuale volumetrica di fibre  $V_f$ , con la percentuale di vuoti  $V_v$ , con l'inaccuratezza del processo di fabbricazione, con l'indebolimento del legame di interfaccia fibra-matrice.

Se il composito cede per rottura della matrice (Figura 2.12), la riduzione di resistenza rappresentata dal fattore  $k$  nella (II.37) può essere attribuita alla concentrazione di sforzi provocata dalla presenza della fibra; Greszezuk<sup>12</sup> propone la seguente formula per il calcolo del fattore di concentrazione degli sforzi (FCS):

$$FCS = \frac{1 - V_f \left[ 1 - \frac{E_m}{E_f} \right]}{1 - \left( \frac{4V_f}{\pi} \right)^{1/2} \left[ 1 - \left( \frac{E_m}{E_f} \right) \right]} \quad (II.38)$$

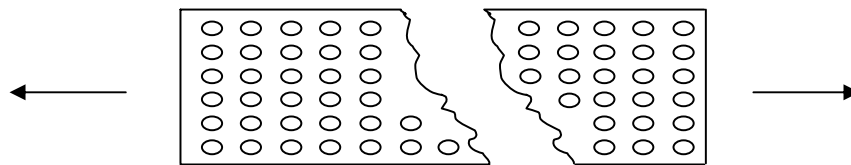


Figura 2.12

La (II.38), ottenuta mediante semplici modelli matematici, non tiene conto degli

<sup>12</sup> Greszezuk, L.B., "Micromechanical Failure Criteries for Composites", Naval Air System Command Contract no. N00019-72-0211, 1973.

effetti di accoppiamento tra fibra e matrice dovuti a differenti coefficienti di Poisson.

Se  $E_m < E_f$ , essa è rappresentata dalla:

$$FCS = \frac{1 - V_f}{1 - \left( \frac{4V_f}{\pi} \right)^{1/2}} \quad (II.39)$$

Il calcolo dell' $FCS$  consente di ricavare la  $\sigma_{2r}$  dalla (II.37) ponendo in essa

$$K = FCS \quad (II.40)$$

Naturalmente il fattore di concentrazione degli sforzi non tiene conto dell'effetto della microporosità, che invece ha una notevole influenza sulla  $\sigma_{2r}$ .

I dati relativi alla riduzione della resistenza al taglio interlaminare saranno discussi nel seguito.

Chamis<sup>13</sup> ha proposto alcune formule per tener conto dell'effetto del volume e del processo produttivo sulla resistenza  $\sigma_{2r}$ .

Sebbene l'autore parta da considerazioni diverse da quelle fino ad ora esposte, in base alle sue ipotesi, la (II.40) può essere modificata come segue:

$$K = FCS \frac{\beta_v}{\beta_t} \quad (II.41)$$

dove  $\beta_v > 1$  tiene conto dell'effetto del volume percentuale di vuoti  $V_v$  e  $\beta_t < 1$  dipende dal processo tecnologico.

Il valore di  $\beta_t$  va determinato sperimentalmente: esso sarà tanto più vicino all'unità quanto più accurato è il processo di fabbricazione. Valori tipici di  $\beta_t$ <sup>14</sup> sono 0.5-0.7.

Il valore di  $\beta_v$  è invece calcolabile dalla:

$$\beta_v = \frac{1}{1 - \left( \frac{4V_v}{\pi V_m} \right)^{1/2}} \quad (II.42)$$

Da un esame dei risultati appare che la (II.42) sottovaluti l'importanza della porosità. Per  $V_v=8\%$  essa fornisce, infatti,  $1/\beta_v=0.52$ , cioè la resistenza si ridurrebbe a poco più della metà, mentre in realtà essa cade al di sotto di 0.30. In ogni caso, la (II.42) tiene conto in qualche modo dell'effetto di  $V_v$ . Richiamando la (II.41), la (II.37) diventa:

<sup>13</sup> Chamis, C.C., "Design Oriented Analysis and Structural Synthesis of Multilayered Filamentary Composites", Ph.D. Thesis, Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio, 1967.

<sup>14</sup> Chamis, C.C., "Failure Criteria for Filamentary Composites", Composite Materials; Testing and Design, ASTM, STP 400, 1969.

$$\sigma_{2r} = \beta_t \frac{\sigma_m}{\beta_v FCS} \quad (II.43)$$

Riportiamo in tabella 2.5 i valori di  $\sigma_{2r}$  per alcuni compositi unidirezionali a matrice plastica. La discrepanza tra i valori teorici e quelli sperimentali può essere dovuta ad inadeguatezza delle formule usate, al contenuto reale di vuoti maggiore di quello teorico, ad una marcata influenza del processo produttivo ( $\beta_t < 1$ ) e/o ad un tipo di rottura diverso da quello ipotizzato (rottura della matrice). Si noti che un'ulteriore fonte di imprecisione nella previsione di proprietà essenzialmente dipendenti dalla matrice, come è appunto la resistenza trasversale, è dovuta ad una imperfetta caratterizzazione della matrice stessa. Infatti è lecito supporre che la matrice "in situ" abbia proprietà diverse da quelle della resina priva di fibre, sulla quale vengono eseguite le prove di caratterizzazione. Tutte le formule proposte vanno quindi intese come indicative: esse danno una idea della resistenza trasversale a trazione del composito e mettono in risalto i parametri che influiscono su tale resistenza.

Tabella 2.5<sup>15</sup> - valori di  $\sigma_{2r}$  per alcuni compositi unidirezionali a matrice plastica

COMPOSITO	COSTITUENTI	V <sub>f</sub>	$\sigma_{2r}$ (MPa)
Vetro/Ep	Vetro S/1009	0.72	46
Gr./Ep	Mod II/5206	0.55	36
Gr./Ep	T300/5208	0.70	40
Gr./Ep	Mod I/Erla 4617	0.45	42
Gr./Ep	Mod I/4289	0.50	4.2
B/Ep	B4/5505	0.50	61

## 2.5 MODULO DI TAGLIO

Il modello rappresentato in figura 2.13 può essere usato per prevedere grossolanamente il modulo di taglio  $G_{12}$  di una lamina.

Sotto un carico tagliente  $\tau_{12}$  il punto A si sposta in A' e risulta:

$$\gamma_{12} = \frac{\overline{AA'}}{l_f - l_m} \quad (II.44)$$

<sup>15</sup> Hofer, K.E.; Rao, N. and Larsen, D., "Development of Engineering Data on the Mechanical and Physical Properties of Advanced Composite Materials", AFML-TR-72-205, Parts I and II, 1972 and 1974.  
Danoel, I.M. and Liber, T., "Lamination Residual Stress in Fiber Composites", NASA CR-134824, March 1975.

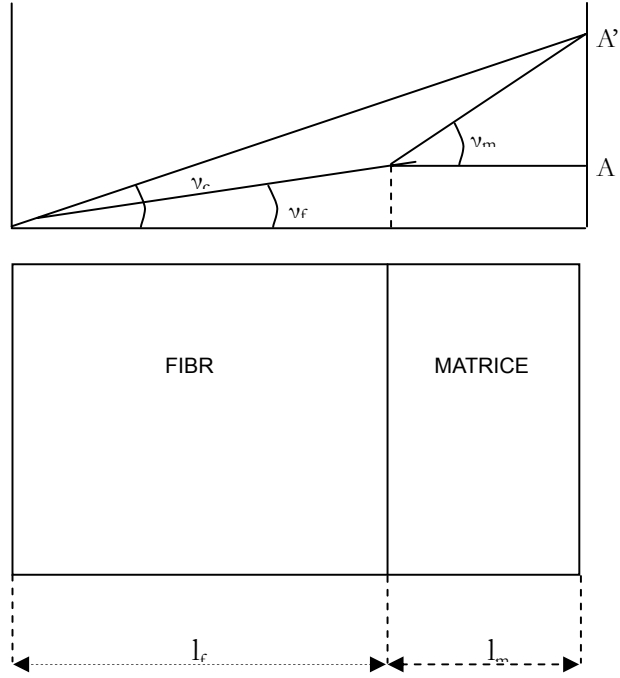


Figura 2.13

Dalla figura 2.13 si ricava facilmente che:

$$\overline{AA'} = \gamma_f l_f + \gamma_m l_m \quad (\text{II.45})$$

per cui risulta:

$$\gamma_{12} = \frac{\gamma_f l_f + \gamma_m l_m}{l_f + l_m} \quad (\text{II.46})$$

riconoscendo che:

$$\frac{l_f}{l_f + l_m} = V_f \quad (\text{II.47})$$

e che:

$$\frac{l_m}{l_f + l_m} = V_m \quad (\text{II.48})$$

possiamo scrivere che:

$$\gamma_{12} = \gamma_f V_f + \gamma_m V_m \quad (\text{II.49})$$

da cui, con semplici considerazioni, si evince:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \quad (\text{II.50})$$

La (II.50) è la:

$$\frac{1}{E_{22}} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \quad (\text{II.51})$$

sono formalmente uguali; anche per il modulo di taglio si può perciò concludere che è una proprietà essenzialmente dipendente dalla matrice.

Una formula più efficace per la previsione di  $G_{12}$  è stata proposta da Hashin<sup>16</sup>:

$$\frac{1}{G_{12}} = \left( \frac{V_f}{G_f} + \frac{\eta_c V_m}{G_m} \right) \frac{1}{V_f + \eta_c V_m} \quad (\text{II.52})$$

dove  $\eta_c$  è un fattore correttivo da determinare sperimentalmente.

Valori accurati del modulo di taglio sono previsti per  $\eta_c = 0.4 \div 0.5$ .

In Tabella 2.6 è riportato il valore del modulo di taglio per alcuni compositi unidirezionali.

Tabella 2.6<sup>17</sup> - valore del modulo di taglio per alcuni compositi unidirezionali

COMPOSITO	COSTITUENTI	$V_f$	$G_{12}$ (MPa)
Vetro/Ep	Vetro S/1009	0.72	12
Gr./Ep	Mod II/5206	0.55	5.24
Gr./Ep	T300/5208	0.70	7.17
Gr./Ep	Mod I/Erla 4617	0.45	6.2
Gr./Ep	Mod I/4289	0.50	4.83
B/Ep	B4/5505	0.50	5.79

## 2.6 RESISTENZA A TAGLIO

La rottura della lamina sotto carico di taglio in piano avviene per cedimento a taglio della matrice e/o dell'interfaccia fibra-matrice.

Le superfici di rottura si sviluppano perciò lungo la matrice e/o lungo l'interfaccia.

Nonostante l'importanza della resistenza a taglio in piano  $\tau_{12r}$ , ai fini della progettazione, poche sono le formule proposte per predire questo parametro; nessuna di esse può, inoltre, considerarsi soddisfacente.

<sup>16</sup> Hashin, Z., "Theory of Fiber Reinforced Materials", NASA Contract NAS1-8818, Novembre 1970;

<sup>17</sup> "Composite Materials Workbook", AFML-TR-78-33, March 1978.

Le difficoltà di trovare delle soluzioni valide in questo caso sono simili a quelle discusse in precedenza in merito alla resistenza trasversale della lamina; esse sono inoltre aggravate dal comportamento marcatamente non lineare del composito dovuto a plasticizzazione della matrice prima della rottura.

In tabella 2.7 si riportano i valori di  $\tau_{12r}$  per alcuni compositi.

Tabella 2.7<sup>18</sup> - Valori di  $\tau_{12r}$  per alcuni compositi

COMPOSITO	COSTITUENTI	V <sub>f</sub>	$\tau_{12r}$ (Mpa)
Vetro/Ep	Vetro S/1009	0.72	45
Gr./Ep	Mod II/5206	0.55	63
Gr./Ep	T300/5208	0.70	68
Gr./Ep	Mod I/Erla 4617	0.45	62
Gr./Ep	Mod I/4289	0.50	34
B/Ep	B4/5505	0.50	67

## 2.7 COEFFICIENTE DI POISSON

Si è messo in evidenza precedentemente che oltre ai moduli  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $G_{12}$ , occorre un coefficiente di Poisson per la caratterizzazione classica di una lamina.

Naturalmente, non è necessario che questo modulo sia  $\nu_{12}$  poiché risulta infatti:

$$\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}} \quad (\text{II.53})$$

La determinazione di  $\nu_{12}$  è equivalente a quella di  $\nu_{21}$ .

Dalla (II.53) appare però evidente che, essendo  $E_{11} \gg E_{22}$ , sarà anche  $\nu_{12} \gg \nu_{21}$ .

Per un composito vetro-resina con  $V_f=0.6$ , è, ad esempio,  $E_{11}=5 \cdot 10^{22}$ , per cui anche  $\nu_{12}$  avrà valore da 5 a 10 volte maggiore di  $\nu_{21}$ .

Il rapporto  $\nu_{12}/\nu_{21}$  è ancora più alto per carbo-resina e boro-resina.

Da un punto di vista sperimentale, risulta di conseguenza più comoda la misura  $\nu_{12}$

<sup>18</sup> Hofer, K.E.; Rao, N. and Larsen, D., "Development of Engineering Data on the Mechanical and Physical Properties of Advanced Composite Materials", AFML – TR – 72 – 205, Parts I and II, 1972 and 1974;  
Danoel, I.M. and Liber, T., "Lamination Residual Stress in Fiber Composites", NASA CR – 134824, March 1975.



di piuttosto che quella di  $\nu_{21}$ .

La previsione di  $\nu_{12}$  può basarsi sullo stesso modello micromeccanico esaminato precedentemente per il calcolo più o meno approssimato degli altri moduli (figura 2.14).

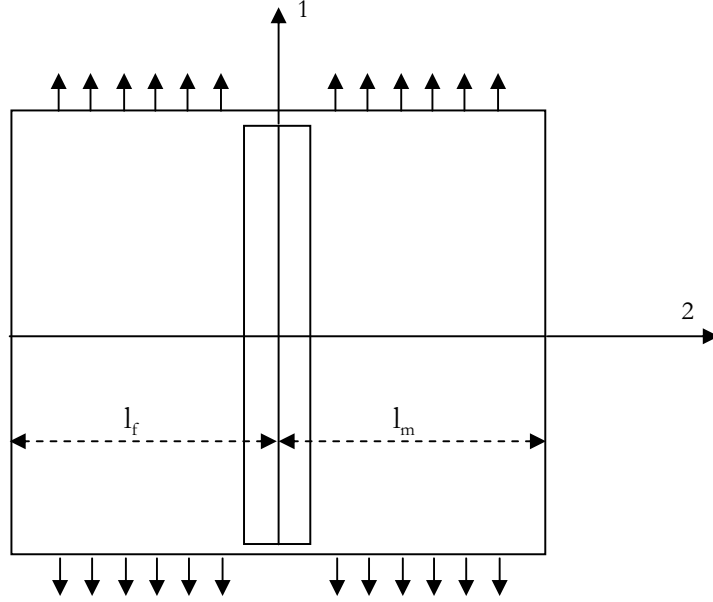


Figura 2.14

Per definizione:

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (\text{II.54})$$

Si verifica immediatamente che:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_{2f} + \Delta l_{2m}}{l_f + l_m} \quad (\text{II.55})$$

dove  $\Delta l_{2f}$  e  $\Delta l_{2m}$  sono le variazioni dimensionali delle fibre e della matrice, in direzione trasversale, quando in direzione 1 il composito subisce un allungamento  $\varepsilon_1$ .

Richiamando la definizione di Modulo di Poisson per le fibre e per la matrice, considerate isotrope, la (II.55) assume la forma:

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu_f l_f \varepsilon_1 + \nu_m l_m \varepsilon_1}{l_f + l_m} \quad (\text{II.56})$$

e, sostituendo la (II.56) nella (II.54), si ottiene:

$$\nu_{12} = \frac{\nu_f l_f + \nu_m l_m}{l_f + l_m} \quad (\text{II.57})$$

ricordando infine le (II.47) e (II.48):

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (\text{II.58})$$

che è formalmente uguale alla legge della media per il calcolo di  $E_{11}$ .

Nonostante la semplicità del modello adottato, la (II.58) fornisce dei valori accurati per la previsione di  $\nu_{12}$ .

Alcuni dati sperimentali sono mostrati nella tabella che segue.

Tabella 2.8<sup>19</sup>

COMPOSITO	COSTITUENTI	V <sub>f</sub>	$\nu_{12r}$ (Mpa)
Vetro/Ep	Vetro S/1009	0.72	0.72
Gr./Ep	Mod II/5206	0.55	0.55
Gr./Ep	T300/5208	0.70	0.70
Gr./Ep	Mod I/Erla 4617	0.45	0.45
Gr./Ep	Mod I/4289	0.50	0.50
B/Ep	B4/5505	0.50	0.50

## 2.8 EQUAZIONE DI HALPIN – TSAI

Halpin e Tsai<sup>20</sup> hanno ridotto ad una semplice formula dei risultati di micromeccanica ottenuti da Hill<sup>21</sup> e generalizzati da Hermans<sup>22</sup>.

La formula proposta, opportunamente modificata, è riportata qui di seguito ed è applicabile ugualmente al calcolo di  $E_{22}$  e di  $G_{12}$ , ma essa ha una validità ancora più generale, come sarà mostrato in seguito:

<sup>19</sup> "Composite Materials Workbook", AFML – TR – 78 – 33, March 1978.

<sup>20</sup> Halpin, J.C. and Tsai, S.W., "Environmental Factors in Composite Materials Design", AFML TR 67-423,

<sup>21</sup> Hill, R., "Theory of Mechanical Properties of Fiber-Strengthened Materials: III Self Consistent Model", J. Mech. Phys. Solids, Vol 12, 1965;

<sup>22</sup> Hermans, J.J., "The Elastic Properties of Fiber Reinforced Materials when the Fiber are Aligned", Proc. Konigl. Nedel. Akad. Van Wetenschappen, Amsterdam, Proceedings Series B, Vol. 70 No. 1, 1967.

$$\frac{P}{P_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (\text{II.59})$$

dove:

$$\eta = \frac{\frac{P_f}{P_m} - 1}{\frac{P_f}{P_m} + \xi} \quad (\text{II.60})$$

Le quantità che appaiono nelle (II.59) e (II.60) sono così identificate:

$P$ : Modulo del composito,  $E_{22}$  o  $G_{12}$ ;

$P_f$ : Corrispondente modulo della fibra,  $E_f$  o  $G_f$ ;

$P_m$ : Corrispondente modulo della matrice,  $E_m$  o  $G_m$ ;

$\xi = 1$  o  $2$  rispettivamente per il calcolo del modulo  $E_{22}$  o di quello  $G_{12}$ .

Tenendo conto del significato dei simboli, la (II.59) e la (II.60) assumono la forma:

$$\frac{E_{22}}{E_m} = \frac{1 + \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (\text{II.61})$$

$$\eta = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + 2} \quad (\text{II.62})$$

per il calcolo di  $E_{22}$ , mentre per il calcolo di  $G_{12}$  la (II.59) e la (II.60) assumono la forma:

$$\frac{G_{12}}{G_m} = \frac{1 + 2\eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (\text{II.63})$$

$$\eta = \frac{\frac{G_f}{G_m} - 1}{\frac{G_f}{G_m} + 1} \quad (\text{II.64})$$

La correlazione è molto buona fino ad una frazione volumetrica  $d_f \cong 70\%$  di fibre.

Al di sopra di questa soglia il modulo previsto con metodi esatti si trova al di sopra di quello calcolato con la formula di Halpin-Tsai.

Quest'ultima può quindi essere considerata un utile strumento per tutti i compositi di uso tecnico.

## 2.9 COEFFICIENTI DI DILATAZIONE TERMICA

Le fibre e la matrice hanno coefficienti di dilatazione termica molto diversi tra loro.

In particolare, il coefficiente di dilatazione termica delle fibre è molto più basso di quello delle matrici plastiche.

Le fibre di carbonio e di kevlar sono caratterizzate da un comportamento anisotropo; la loro struttura è costituita da fibre orientate preferenzialmente in direzione assiale.

Questa particolare conformazione favorisce una diversa espansione termica del materiale nelle direzioni longitudinale e trasversale, per cui le fibre di kevlar ed alcune fibre di carbonio mostrano un coefficiente di dilatazione termica negativo nella direzione longitudinale.

Quando il rinforzo e la matrice vengono uniti per formare la lamina, essi lavorano approssimativamente come sistemi in parallelo in direzione 1, ma in serie in direzione 2.

E' pertanto intuitivo che anche la lamina acquista un comportamento anisotropo rispetto alla dilatazione termica.

Le deformazioni che una lamina subisce quando è sottoposta ad una variazione di temperatura, possono essere calcolati se sono noti i due coefficienti di dilatazione termica  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  nelle direzioni 1 e 2.

Basandosi su considerazioni energetiche, Schapery<sup>23</sup> ha ricavato le formule:

$$\alpha_1 = \frac{E_f \alpha_f V_f + E_m \alpha_m V_m}{E_f V_f + E_m V_m} \quad (II.65)$$

$$\alpha_2 = (1 + \nu_f) \alpha_f V_f + (1 + \nu_m) \alpha_m V_m - \alpha_1 (\nu_f V_f + \nu_m V_m) \quad (II.66)$$

Confrontando le formule proposte con alcune soluzioni esatte, Schapery ha mostrato che la (II.65) e la (II.66) prevedono accuratamente i valori di  $\alpha_1$  e di  $\alpha_2$ .

Diagrammando le (II.65) ed (II.66) al variare di  $V_f$ , si nota che il coefficiente  $\alpha_2$  ha un iniziale incremento per volumi di fibre molto bassi; questo comportamento è dovuto all'effetto della costrizione assiale delle fibre sulla matrice, che è predominante per valori di  $V_f$  prossimi allo zero.

L'approssimazione che si commette considerando isotropo il comportamento delle

<sup>23</sup> Schapery, R. A., "Thermal Expansion Coefficients of Composite Materials Based on Energy Principles", J. Comp. Mat., Vol 2, No. 3, July 1968.

fibre, non è, fortunatamente, molto importante nel computo di proprietà della lamina quali i coefficienti di dilatazione termica ed i moduli elastici.

Eccetto casi particolari, l'anisotropia delle fibre può quindi essere trascurata.

La tabella 2.9 riporta i coefficienti di dilatazione termica di alcuni compositi unidirezionali.

Tabella 2.9<sup>24</sup> - coefficienti di dilatazione termica di alcuni compositi unidirezionali

COMPOSITO	COSTITUENTI	$V_f$	$\alpha_1 (\mu\epsilon / \epsilon / ^\circ C)$	$\alpha_2 (\mu\epsilon / \epsilon / ^\circ C)$
Vetro/Ep	Scotchply 1002	0.45	4.16	15.5
Vetro/Ep	Vetro S/1009	0.72	3.8	16.7
Gr./Ep	Mod II/5206	0.55	-0.23	34.0
Gr./Ep	HMS/3200 M	0.48	-0.23	33.5
Gr./Ep	T300/5208	0.70	0.01	12.5
Gr./Ep	Mod I/Erla 4209	0.51	-1.10	31.5
Gr./Ep	Mod I/Erla 4617	0.45	-0.90	33.3
B/Ep	B4/5505	0.50	4.32	22.1

<sup>24</sup> "Composite Materials Workbook", AFML-TR-78, March 1978.

## CAPITOLO 3

# COMPORTAMENTO MACROMECCANICO DELLA LAMINA

### INTRODUZIONE

Nel presente capitolo si prenderà in considerazione il comportamento macromeccanico della lamina; quest'ultima sarà vista cioè come un corpo comunque anisotropo (più in particolare sarà considerata come un corpo trasversalmente isotropo), ma omogeneo.

Si mostrerà come, partendo dai valori delle costanti elastiche che caratterizzano il comportamento della lamina nelle direzioni principali, e servendosi delle proprietà tensoriali delle deformazioni e delle tensioni, sia possibile risalire all'equazione costitutiva in direzione arbitraria, e attraverso essa, alle costanti ingegneristiche in tali direzioni.

Si vedrà, inoltre, come, servendosi di opportune ipotesi sul comportamento meccanico della lamina in condizioni complesse di tensione, sia possibile risalire con sufficiente approssimazione alla resistenza della lamina stessa in una direzione qualsiasi, partendo dalla conoscenza delle sue sole caratteristiche nelle direzioni principali.

L'analisi sarà limitata all'ipotesi di elasticità lineare e di stato tensionale piano, anche quando non direttamente specificato.

### 3.1 EQUAZIONE COSTITUTIVA DELLA LAMINA IN DIREZIONI ARBITRARIE

Una lamina è, per sua natura, trasversalmente isotropa; in condizioni di stato tensionale piano, e riferendosi agli assi principali della lamina, è valida la relazione:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

Questa relazione è ugualmente valida per un materiale ortotropo, il cui comportamento nel piano 1-2 coincide con quello di un materiale trasversalmente isotropo; nel seguito ci si riferirà, per semplicità, alla lamina come ad un corpo ortotropo.

La (III.1) non è in generale sufficiente a risolvere i problemi che si presentano nello studio della lamina: essa permette infatti di calcolare le deformazioni nelle direzioni principali soltanto quando siano note le sollecitazioni nelle stesse direzioni.

Analoga considerazione vale per l'inversa della (III.1)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

che consente di risalire alle  $\sigma_i$  quando siano note le  $\varepsilon_i$ .

Generalmente accade, invece, di conoscere lo stato di deformazione (tensione) in due direzioni ortogonali x-y arbitrarie, e dover calcolare le rispettive tensioni (deformazioni).

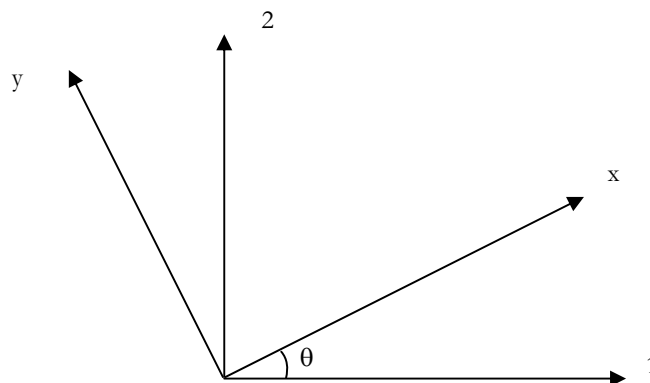


Figura 3.1

Il problema è di facile soluzione ricordando le caratteristiche tensoriali delle tensioni e delle deformazioni; assumendo come positivo per l'angolo  $\theta$  il verso indicato in figura 3.1, risulta:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.3})$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 1/2 \gamma_{12} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 1/2 \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.4})$$

dove:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin^2 \vartheta & 2\sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin^2 \vartheta & \cos^2 \vartheta & -2\sin \vartheta \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \cos \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta & (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \end{bmatrix}$$

Sostituendo la (III.3) e la (III.4) nella (III.2) si ottiene:

$$[T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [Q][T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

da cui si ricava:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q][T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

Ricordando le regole che governano il prodotto tra matrici, si può dimostrare che la (III.6) può essere espressa nella forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

dove:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\ \overline{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ \overline{Q}_{16} &= -mn^3Q_{22} + m^3nQ_{11} - mn(m^2 - n^2)(Q_{12} + 2Q_{66}) \\ \overline{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\ \overline{Q}_{26} &= -m^3nQ_{22} + mn^3Q_{11} + mn(m^2 - n^2)(Q_{12} + 2Q_{66}) \\ \overline{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{66}(m^2 + n^2)^2 \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

con:



$$m = \cos \vartheta$$

$$n = \sin \vartheta$$

La (III.7) è nota come equazione costitutiva della lamina secondo due direzioni  $x$ ,  $y$  ortogonali e generiche, ed è utile se occorre calcolare  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  conoscendo le deformazioni corrispondenti.

Quando siano note, invece, le sollecitazioni, e si vogliano ottenere le deformazioni, la (III.7) può essere usata nella sua forma inversa:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{S_{11}} & \overline{S_{12}} & \overline{S_{16}} \\ \overline{S_{12}} & \overline{S_{22}} & \overline{S_{26}} \\ \overline{S_{16}} & \overline{S_{26}} & \overline{S_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

dove:

$$\begin{aligned} \overline{S_{11}} &= S_{11} \cos^4 \vartheta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + S_{22} \sin^4 \vartheta \\ \overline{S_{22}} &= S_{11} \sin^4 \vartheta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + S_{22} \cos^4 \vartheta \\ \overline{S_{12}} &= S_{12} (\sin^4 \vartheta + \cos^4 \vartheta) + (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \\ \overline{S_{66}} &= 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}) \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + S_{66} (\sin^4 \vartheta + \cos^4 \vartheta) \\ \overline{S_{16}} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \vartheta \cos^3 \vartheta - (2S_{12} - 2S_{22} - S_{66}) \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \\ \overline{S_{26}} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \vartheta \cos \vartheta - (2S_{12} - 2S_{22} - S_{66}) \sin \vartheta \cos^3 \vartheta \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Da un punto di vista fisico, il comportamento di un materiale ortotropo, come la lamina, in condizioni di stato tensionale piano, si semplifica soltanto quando lo si consideri riferendosi agli assi di ortotropia; se, al contrario, gli assi di riferimento assunti non coincidono con quelli di ortotropia, il materiale è elasticamente equivalente ad un materiale anisotropo, e presenta effetti di mutua induzione tra carichi traenti (taglienti) e deformazioni taglienti (traenti), a causa della presenza di coefficienti di mutua influenza  $\overline{Q_{16}}$  e  $\overline{Q_{26}}$ .

Occorre però tenere presente che esiste una differenza fondamentale tra un materiale anisotropo ed un materiale ortotropo; le sei costanti elastiche  $S_{ij}$  che compaiono nella (II.9) non sono infatti indipendenti: come mostrato nella (III.10), basta conoscere i soli valori  $S_{11}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{66}$  per determinarle tutte.

Se il corpo non avesse piani di simmetria particolari, le  $\overline{S_{ij}}$  sarebbero invece indipendenti tra loro, e la conoscenza di ognuno di esse sarebbe indispensabile per l'utilizzazione dell'equazione costitutiva.

### 3.2 COSTANTI ELASTICHE INGEGNERISTICHE DELLA LAMINA IN DIREZIONI ARBITRARIE

Si mostrerà, ora, come è possibile, partendo dall'equazione costitutiva della lamina, risalire alle sue costanti elastiche ingegneristiche in una qualsiasi direzione.

Il modulo di Young nella generica direzione  $x$ , è definito come il rapporto tra la sollecitazione  $\sigma_x$  applicata lungo  $x$  e la deformazione  $\varepsilon_x$  subita dalla lamina nella stessa direzione in una prova di trazione monoassiale (cioè quando  $\sigma_y=\sigma_z=\sigma_{xy}=0$ ):

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \quad (\text{III.11})$$

Partendo dalla (III.9) si ottiene facilmente, in tali condizioni di carico:

$$\varepsilon_x = S_{11}\sigma_x \quad (\text{III.12})$$

e, sostituendo la (III.12) nella (III.11) si ottiene:

$$E_x = \frac{1}{S_{11}} \quad (\text{III.13})$$

Con altrettanta semplicità si può dimostrare, tenendo presenti le definizioni delle costanti elastiche ingegneristiche, che:

$$E_y = \frac{1}{S_{22}} \quad (\text{III.14})$$

$$\nu_{xy} = -\frac{S_{12}}{S_{11}} \quad (\text{III.15})$$

$$G_{xy} = \frac{1}{S_{66}} \quad (\text{III.16})$$

e, per i coefficienti di mutua influenza:

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\xi}}{\gamma_{xy}} = \frac{1}{S_{16}} \quad (\text{III.17})$$

$$\eta_{yxy} = \frac{\sigma_{\psi}}{\gamma_{xy}} = \frac{1}{S_{26}} \quad (\text{III.18})$$

Il significato delle cedevolezza  $\overline{S_{ij}}$ , evidenziato dalle (III.13-18), ne spiega alcune caratteristiche che risultano da un'analisi delle (III.10).

Esaminando queste ultime ci si rende conto che le cedevolezza  $\overline{S_{11}}$ ,  $\overline{S_{12}}$ ,  $\overline{S_{22}}$ ,  $\overline{S_{66}}$ , sono indipendenti dal segno dell'angolo  $\vartheta$ , essendo funzioni pari di  $\cos\vartheta$  e di  $\sin\vartheta$ .

Questo significa che  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  e  $G_{xy}$ , saranno uguali per una lamina con fibre orientate sia a  $+\vartheta$  che a  $-\vartheta$ , come è fisicamente evidente dalla figura 3.2.

Si osservi, infatti, che la prima lamina di figura 3.2a è la stessa di quella di figura 3.2b, ma guardata dal lato opposto rispetto al piano del disegno.

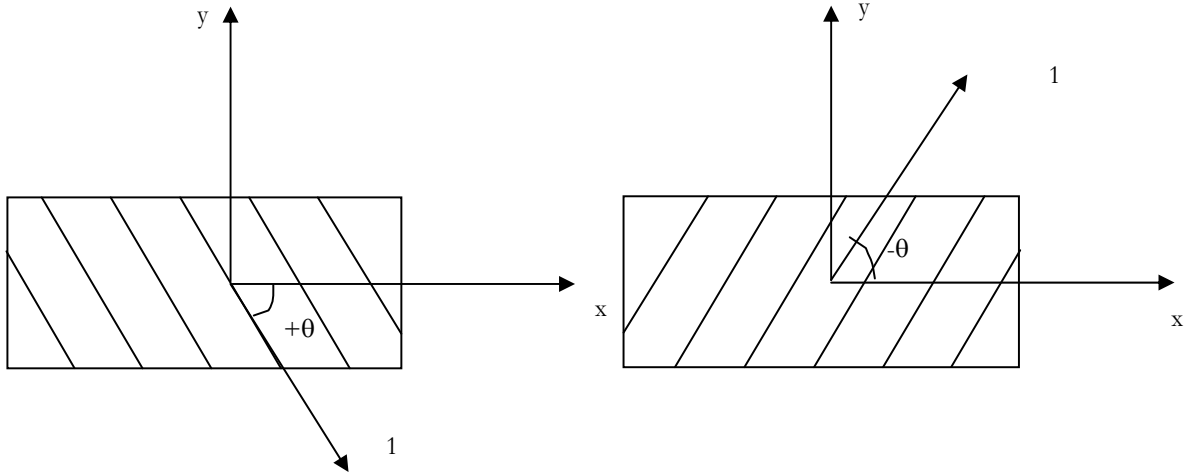


Figura 3.2a

Figura 3.2b

Poiché deve essere:

$$E_x, E_y, G_{xy}, \gamma_{xy} > 0 \quad (\text{III.19})$$

Dalle (III.13-16) si deduce che deve essere anche:

$$\overline{S}_{11}, \overline{S}_{22}, \overline{S}_{66} > 0 \quad (\text{III.20})$$

$$\overline{S}_{12} < 0 \quad (\text{III.21})$$

Al contrario delle cedevolezze fino ad ora esaminate, le  $\overline{S}_{16}$  e le  $\overline{S}_{26}$  cambiano di segno quando varia il segno di  $\vartheta$ .

Anche i coefficienti di mutua influenza (III.17) e (III.18) subiscono, quindi, la stessa sorte.

Spiegheremo ora il significato fisico di questa osservazione.

Si immagini di sottoporre ad un carico  $P$  traente una lamina con fibre orientate a  $+\vartheta$  (figura 3.2a); per avere un'idea del tipo di deformata conseguente all'applicazione della forza  $P$ , quest'ultima può essere immaginata come divisa in due aliquote  $P_1$  e  $P_2$ , rispettivamente parallela e normale alla direzione delle fibre. Poiché il modulo elastico  $E_{11}$  è maggiore di  $E_{22}$ , in generale nella direzione 2 ci sarà

un allungamento più sensibile che nella direzione 1.

Ne segue una deformata del tipo illustrato a tratto discontinuo in figura 3.3a, che rende ragione dell'esistenza degli effetti di mutua induzione in un materiale anisotropo.

Seguendo lo stesso ragionamento per la figura 3.3b, si otterrà una deformata speculare rispetto a quella di figura 3.3a.

Si noti ora che nel caso a) la deformazione tagliante ha segno negativo, in quanto provoca un aumento dell'angolo formato tra i semiassi positivi x-y; nel caso b), invece, si ottiene una diminuzione di tale angolo, per cui la deformazione tagliante ha segno positivo.

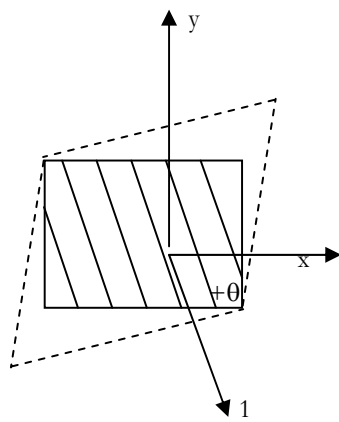


Figura 3.3a

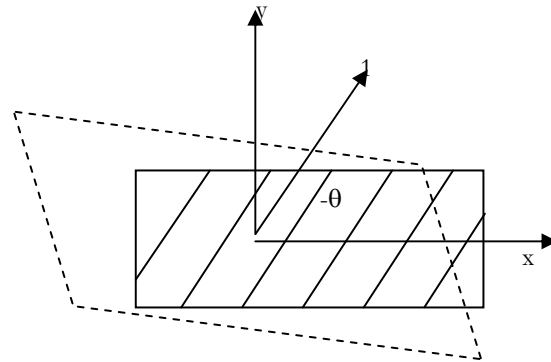


Figura 3.3b

Poiché, in ogni caso, applicando la (III.9) si ottiene:

$$\gamma_{xy} = \overline{S_{16}} \sigma_x$$

è evidente che, nel caso a), il valore di  $\overline{S_{16}}$  dovrà essere negativo, mentre nel caso b) sarà positivo.

I valori assunti da  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$  sono riportati in tabella 3.1.

Tabella 3.1

<b>PROPRIETA' ELASTICHE DELLA LAMINA</b>				
Materiale	$E_{11}$ (Gpa)	$E_{22}$ (Gpa)	$G_{12}$ (Gpa)	$\nu_{12}$
Vetro-resina	38.6	8.27	4.14	0.26
Carbo-resina	181.0	10.30	7.17	0.28
Boro-resina	204.0	18.50	5.79	0.23
Aramidiche-49-resina	76.0	5.50	2.30	0.34

Occorre rilevare che le (III.13-18) insieme alle (III.10), permettono di semplificare notevolmente lo studio del comportamento elastico della lamina.

Da un punto di vista pratico, esse dimostrano che non è necessario misurare le costanti elastiche in tutte le direzioni, basta invece misurare soltanto i quattro valori mediante esperimenti indipendenti, per poi calcolare le costanti elastiche volute in una direzione arbitraria.

### 3.3 INVARIANTI

Tsai e Pagano hanno suggerito una forma analitica molto comoda per il calcolo delle

$\overline{Q}_{ij}$  partendo dalle  $Q_{ij}$ :

$$\begin{aligned}
 \overline{Q}_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\vartheta + U_3 \cos 4\vartheta \\
 \overline{Q}_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\vartheta + U_3 \cos 4\vartheta \\
 \overline{Q}_{12} &= U_4 - U_3 \cos 4\vartheta \\
 \overline{Q}_{66} &= U_5 - U_3 \cos 4\vartheta \\
 \overline{Q}_{16} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\vartheta + U_3 \sin 4\vartheta \\
 \overline{Q}_{26} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\vartheta - U_3 \sin 4\vartheta
 \end{aligned}
 \tag{III.22}$$

dove:

$$U_1 = \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \quad (\text{III.23})$$

$$U_2 = \frac{1}{8}(Q_{11} - Q_{22})$$

$$U_3 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})$$

$$U_4 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})$$

$$U_5 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

Le (III.22), essendo più compatte delle (III.8) possono essere utilizzate più vantaggiosamente per il calcolo delle  $\overline{Q_{ij}}$ ; esse, inoltre, mostrano come i primi quattro termini delle (III.22) siano composti da un valore costante, dipendente dalle proprietà della lamina, ma non dall'angolo di orientazione  $\vartheta$ , sommato a valori variabili con la frequenza diversa al variare di  $\vartheta$ .

I termini  $U_1, U_4, U_5$ , dipendenti unicamente dalle proprietà della lamina, sono detti invarianti.

Il concetto di invarianza può essere molto utile nella progettazione dei materiali compositi.

Seguendo il criterio adottato per le (III.22), anche le  $\overline{S_{ij}}$  possono essere espresse in termini di invarianti.

Si può verificare che:

$$\begin{aligned} \overline{S_{11}} &= U'_1 + U'_2 \cos 2\vartheta - U'_3 \cos 4\vartheta \\ \overline{S_{22}} &= U'_1 - U'_2 \cos 2\vartheta - U'_3 \cos 4\vartheta \\ \overline{S_{12}} &= U'_4 + U'_3 \cos 4\vartheta \\ \overline{S_{66}} &= U'_5 + 4U'_3 \cos 4\vartheta \\ \overline{S_{16}} &= U'_2 \sin 2\vartheta - 2U'_3 \sin 4\vartheta \\ \overline{S_{26}} &= U'_2 \sin 2\vartheta + 2U'_3 \sin 4\vartheta \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

dove:

$$U'_1 = \frac{1}{8}(3S_{11} + 3S_{22} + 2S_{12} + S_{66}) \quad (\text{III.25})$$

$$U'_2 = \frac{1}{8}(S_{11} - S_{22})$$

$$U'_3 = \frac{1}{8}(S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66})$$

$$U'_4 = \frac{1}{8}(S_{11} + S_{22} + 6S_{12} - S_{66})$$

$$U'_5 = \frac{1}{2}(S_{11} + S_{22} - 2S_{12} + S_{66})$$

### 3.4 RESISTENZA DELLA LAMINA IN DIREZIONI ARBITRARIE

Si è mostrato precedentemente come la caratterizzazione del comportamento elastico di una lamina passi attraverso la misura delle quattro costanti elastiche  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$ .

Quando tali costanti sono note, è possibile risalire analiticamente alle proprietà elastiche della lamina in una qualsiasi direzione sfruttando le proprietà tensoriali delle deformazioni.

Dal punto di vista applicativo è altrettanto importante riuscire a prevedere il cedimento di una lamina sottoposta ad uno stato tensionale complesso, partendo dai valori di resistenza ricavati da semplici prove di trazione, compressione e taglio. Grazie alle proprietà tensoriali delle sollecitazioni, uno stato tensionale comunque complesso, può essere risolto nelle direzioni principali 1-2 della lamina.

Il problema è dunque quello di sapere, una volta note, le sollecitazioni  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\tau_{12}$  che insistono sulla lamina nelle sue direzioni principali, quale valore massimo tali sollecitazioni possano assumere prima che si verifichi crisi nel materiale.

Naturalmente la soluzione analitica di questo problema è possibile solo se si conoscono le cause che provocano la rottura; poiché queste non sono determinabili in modo univoco, occorre formulare delle ipotesi di rottura e provare poi la loro validità verificandone l'efficacia sperimentalmente.

Il modo più immediato per far questo consiste nel calcolare la resistenza a trazione (o a compressione o a taglio) prevista per la lamina in una direzione arbitraria e confrontarla con quella misurata<sup>25</sup>.

<sup>25</sup> Sottoporre una lamina ad una prova di carico monoassiale secondo una direzione qualsiasi, genera, infatti, uno stato tensionale complesso secondo le direzioni principali 1-2.

Alcuni criteri di resistenza più diffusi nel campo dei materiali compositi, derivanti da differenti ipotesi di rottura, sono i seguenti:

- *Criterio della massima tensione;*
- *Criterio della massima deformazione;*
- *Criterio di Tsai-Hill, Tsai-Wu, Hoffman.*

che saranno ora trattati in dettaglio.

### **3.4.1 CRITERIO DELLA MASSIMA TENSIONE**

Si fonda sull'ipotesi, suggerita dalla prova di carico monoassiale, che la rottura avvenga quando, in una certa direzione, viene eguagliato il valore della resistenza che compete al materiale in quella direzione.

In termini analitici, si suppone che si abbia rottura quando almeno una delle seguenti disuguaglianze viene verificata:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\geq \sigma_{1r} \\ \sigma_2 &\geq \sigma_{2r} \\ |\tau_{12}| &\geq |\tau_{12r}|\end{aligned}\tag{III.26}$$

o, in compressione:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\leq \sigma_{1r}^c \\ \sigma_2 &\leq \sigma_{2r}^c\end{aligned}\tag{III.27}$$

Si noti che la resistenza a taglio conserva lo stesso valore, indipendentemente dal segno della componente di tagliante  $\tau_{12}$ .

Questo criterio è non interattivo, esso stabilisce cioè che per definire la possibilità di rottura del materiale occorre considerare le sollecitazioni indipendentemente le une dalle altre; questo corrisponde alla ipotesi fisica che ogni tipo di tensione provoca un modo di rottura non influenzato dalla presenza di altre sollecitazioni.

Si svilupperà ora questo criterio di resistenza, ricavando mediante esso la previsione sulla resistenza della lamina sottoposta a carico traente in una direzione  $x$  qualsiasi.

Volendo usare le (II.26-27) occorre risolvere le tensioni lungo le direzioni principali 1-2.

Applicando l'equazione di trasformazione (II.3):



$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \vartheta$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \vartheta \quad (\text{III.28})$$

$$\tau_{12} = -\sigma_x \sin \vartheta \cos \vartheta$$

Applicando le (III.26) e ricordando la proprietà non direzionale della resistenza tagliante, si può affermare che si verifica rottura quando si raggiunge il più basso dei seguenti valori di  $\sigma_x$ :

$$\sigma_x = \begin{cases} \frac{\sigma_{1r}}{\cos^2 \vartheta} \\ \frac{\sigma_{2r}}{\sin^2 \vartheta} \\ \frac{\tau_{12r}}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

### **3.4.2 CRITERIO DELLA MASSIME DEFORMAZIONE**

Deriva dall'ipotesi, intuitivamente evidente, che la rottura si verifichi quando la distanza tra le particelle costituenti un corpo superi un certo limite.

Secondo questo criterio si ha cedimento quando è soddisfatta almeno una delle seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\geq \varepsilon_{1r} \\ \varepsilon_2 &\geq \varepsilon_{2r} \\ |\gamma_{12}| &\geq \tau_{12r} \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

o, se  $\varepsilon_1$  ed  $\varepsilon_2$  sono negative:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\leq \varepsilon_{1r}^c \\ \varepsilon_2 &\leq \varepsilon_{2r}^c \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Se il materiale è supposto linearmente elastico fino al cedimento (o crisi), le deformazioni di crisi nell'equazione (III.30) possono essere rapportate direttamente alle tensioni di crisi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1r} &= \frac{\sigma_{1r}}{E_1} \\ \varepsilon_{2r} &= \frac{\sigma_{2r}}{E_2} \\ \gamma_{12r} &= \frac{\tau_{12r}}{G_{12}} \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

Consideriamo una lamina ortotropa soggetta ad una tensione  $\sigma_x$  formante un angolo  $\vartheta$  con la direzione principale 1 longitudinale.

Le tensioni nelle direzioni principali del materiale, sono calcolate con la legge di Hooke per materiali ortotropi, come segue:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1}(\cos^2 \vartheta - \nu_{12} \sin^2 \vartheta) \sigma_x \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E_2}(\sin^2 \vartheta - \nu_{12} \cos^2 \vartheta) \sigma_x \\ \gamma_{21} &= \frac{1}{G_{12}}(\sin \vartheta \cos \vartheta) \sigma_x\end{aligned}\quad (\text{III.33})$$

La (III.32) afferma che la crisi si verifica se  $\sigma_x$  supera il più piccolo dei seguenti valori:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_{1r}}{\cos^2 \vartheta - \nu_{12} \sin^2 \vartheta} \\ \sigma_x &= \frac{\sigma_{2r}}{\sin^2 \vartheta - \nu_{12} \cos^2 \vartheta} \\ \sigma_x &= \frac{\tau_{12}}{\sin \vartheta \cos \vartheta}\end{aligned}\quad (\text{III.34})$$

### **3.4.3 CRITERI DI TSAI-HILL, TSAI-WU, HOFFMAN**

In generale, questi criteri stabiliscono il sopraggiungere della crisi nella lamina quando viene verificata la relazione [8], [9], [10], [11]:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1rt} \sigma_{1rc}} + \frac{2F_{12}^* \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_{1rt} \sigma_{1rc} \sigma_{2rt} \sigma_{2rc}}} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{2rt} \sigma_{2rc}} + \frac{\tau_{12}^2}{\tau_{12r}^2} + \left( \frac{1}{\sigma_{1rt}} - \frac{1}{\sigma_{1rc}} \right) \sigma_1 + \left( \frac{1}{\sigma_{2rt}} - \frac{1}{\sigma_{2rc}} \right) \sigma_2 = 1 \quad (\text{III.35})$$

dove:

$$F_{12}^* = \frac{F_{12}}{\sqrt{F_{11} F_{22}}}$$

con:

$$-1 \leq F_{12}^* \leq 1$$

con  $\sigma_{1rt}$ ,  $\sigma_{1rc}$ ,  $\sigma_{2rt}$ ,  $\sigma_{2rc}$ ,  $\tau_{12r}$  valori limiti delle tensioni nelle rispettive direzioni in trazione e compressione.  $F_{12}^*$  rappresenta il termine normalizzato di interazione del criterio di resistenza; mentre,  $F_{11}$  e  $F_{22}$  sono i parametri di resistenza nel dominio di

sicurezza individuato dal criterio di resistenza.

Questa espressione si specializza nei criteri di *Tsai-Hill*, *Tsai-Wu*, *Hoffman* secondo le varianti indicate nella tabella 3.2.

Tabella 3.2

Criterio	Resistenze	$F_{12}$	$F_{12}^*$
Tsai-Hill	$\sigma_{1rt}=\sigma_{1rc}, \sigma_{2rt}=\sigma_{2rc}$	$-\frac{1}{2}(\sigma_{1rt})^2$	$-0.014 \leq (\sigma_{2rt}/2 \sigma_{1rt}) \leq -0.008$
Tsai-Wu	$\sigma_{1rt} \neq \sigma_{1rc}, \sigma_{2rt} \neq \sigma_{2rc}$	$F_{12}^* \sqrt{\sigma_{1rt} \sigma_{1rc} \sigma_{2rt} \sigma_{2rc}}$	$-1 \leq F_{12}^* \leq 1$
Hoffman	$\sigma_{1rt} \neq \sigma_{1rc}, \sigma_{2rt} \neq \sigma_{2rc}$	$-1/2 \sigma_{1rt} \sigma_{1rc}$	$-0.041 \leq (-1/2) \sqrt{(\sigma_{2rt} \sigma_{2rc}) / (\sigma_{1rt} \sigma_{1rc})} \leq -0.022$

Un'applicazione del criterio di *Tsai-Hill* si ha nel caso di una tensione  $\sigma_x$  agente su una lamina ortotropica.

Le tensioni nelle direzioni principali date dalla (III.28) possono essere direttamente sostituite nella (III.35) per avere la crisi:

$$\frac{\cos^4 \vartheta}{\sigma_{1r}^2} - \frac{\cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta}{\sigma_{1r}^2} + \frac{\sin^4 \vartheta}{\sigma_{2r}^2} + \frac{\cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta}{\tau_{12r}^2} = \frac{1}{\sigma_x^2} \quad (\text{III.36})$$

Questa teoria, quindi, fornisce una singola funzione per prevedere la forza, ma non prende in considerazione le interazioni tra le lunghezze che non sono sottoposte alla massima sollecitazione.

### 3.5 EQUAZIONE COSTITUTIVA DELLA LAMINA IN FUNZIONE DELLE DEFORMAZIONI DEL PIANO DEL LAMINATO

Consideriamo un laminato formato da  $N_0$  lamine; per la generica lamina  $i$ -esima definita dall'angolo  $\vartheta_i$ , possiamo scrivere l'equazione costitutiva:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

In questa relazione, le tensioni e le deformazioni sono quelle della lamina  $i$ -esima nel riferimento del laminato; ci si può chiedere se è possibile trovare le tensioni nella lamina in funzione della deformazione del piano mediano del laminato.

Possiamo fare le seguenti ipotesi:

Se il laminato è sottile, una linea dritta e perpendicolare alla superficie media del laminato resta tale quando quest'ultimo viene teso e curvato. La deformazione perpendicolare alla linea media sia nulla, cioè :

$$\varepsilon_z = 0$$

La prima ipotesi equivale a dire che:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

essendo  $z$  la direzione perpendicolare al piano  $x$ - $y$ .

Consideriamo un'azione trasversale del laminato rappresentato in figura 3.4, a seguito di una deformazione generica: il punto  $B$  subisce uno spostamento  $u_0$  nella direzione  $x$  e la superficie di traccia  $AC$  ruota intorno a  $B$  restando piana.

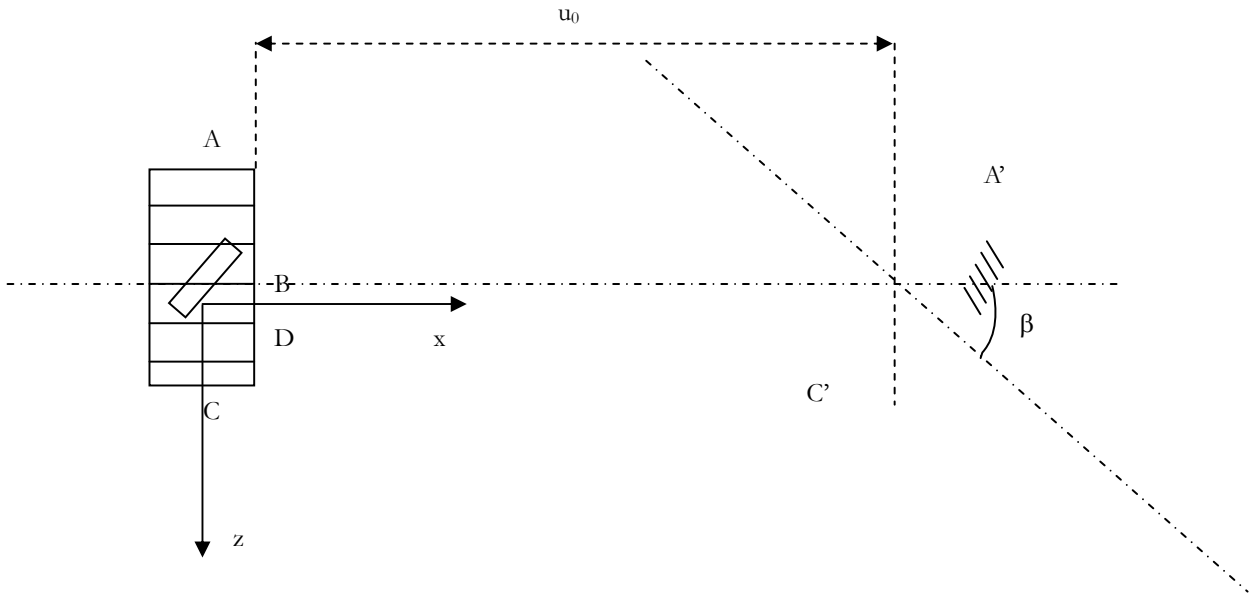


Figura 3.4

Il punto  $D$  subisce uno spostamento lungo  $x$  facilmente calcolabile come

$$u_d = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{III.38})$$

In modo analogo si può ricavare che:

$$v_d = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{III.39})$$

Per piccoli spostamenti le deformazioni possono essere scritte come:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{III.40})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Essendo, per le ipotesi a) e b)

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \varepsilon_z = 0$$

con le relazioni (III.38) e (III.39), le (III.40) diventano:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (\text{III.41})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

essendo:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

le deformazioni del piano del laminato ed essendo:

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$

$$k_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

le curvature del piano medio, le relazioni (III.41) si scrivono in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z_i \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.42})$$

le relazioni (III.42), sostituite nelle (III.37) forniscono:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{23} \\ \overline{Q}_{31} & \overline{Q}_{32} & \overline{Q}_{33} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z_i \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{III.43})$$

A questo punto si possono fare due osservazioni:

Le relazioni trovate sono valide per laminati piani; volendo l'estensione al caso di gusci cilindrici, bisogna aggiungere il termine nelle  $w_0/r$  relazioni (III.40), in cui  $r$  è il raggio di curvatura.

Potendo essere i termini della matrice  $[\overline{Q}]$  differenti per ogni lamina, la variazione delle tensioni attraverso il laminato non è necessariamente lineare, anche quando la variazione di deformazione lo fosse.

### 3.6 FORZE E MOMENTI RISULTANTI NEL LAMINATO

Consideriamo un laminato di spessore  $2h$  e di larghezza  $b$  unitaria come rappresentato in figura 3.5 (si è assunta una terna destrorsa).

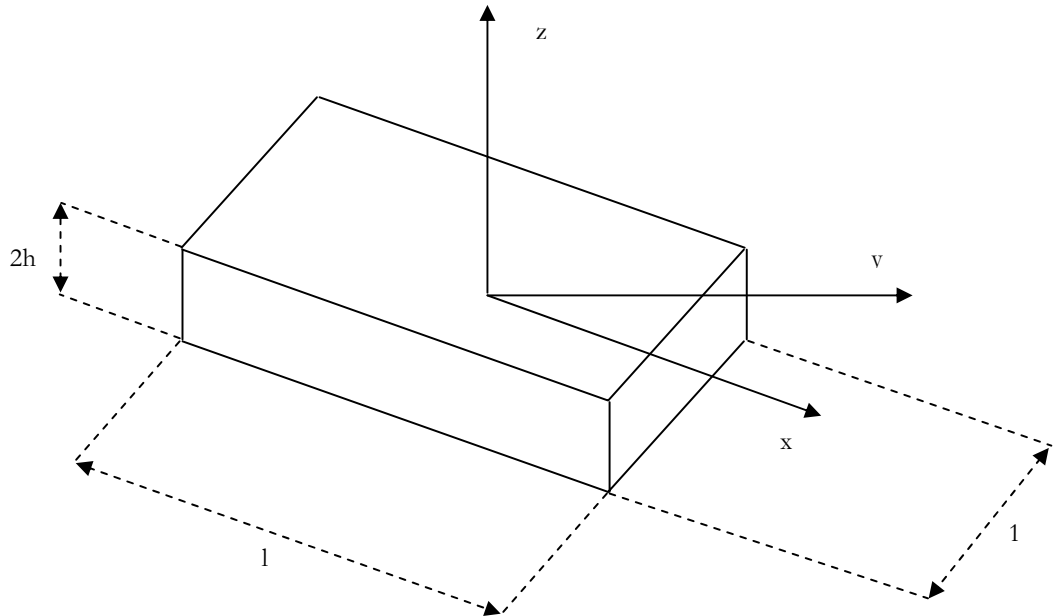


Figura 3.5

Le forze ed i momenti risultanti in un laminato possono essere ottenuti dalle integrazioni, su tutto lo spessore del laminato, delle tensioni agenti.

Per quanto detto risulta:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h}^h \sigma_x dz \\
 N_y &= \int_{-h}^h \sigma_y dz \\
 N_{xy} &= \int_{-h}^h \tau_{xy} dz \\
 M_x &= \int_{-h}^h \sigma_x z dz \\
 M_y &= \int_{-h}^h \sigma_y z dz \\
 M_{xy} &= \int_{-h}^h \tau_{xy} z dz
 \end{aligned} \tag{III.44}$$

Si deve osservare che, con diversa notazione rispetto a quanto avviene normalmente, il momento  $M_x$  è il momento dovuto alle  $\sigma_x$ ,  $M_y$  alle  $\sigma_y$  ed  $M_{xy}$  alle  $\tau_{xy}$ .

Sono positivi i momenti  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  per i quali le lamine a  $z$  positive, cioè al di sopra del piano mediano, sono assoggettate rispettivamente a  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  positive.

Nelle espressioni (III.44), si può sostituire all'integrale esteso a tutto lo spessore, la sommatoria degli integrali, ciascuno esteso allo spessore  $(h_i - h_{i-1})$  della lamina  $i$ -esima, come mostrato in figura 3.6.

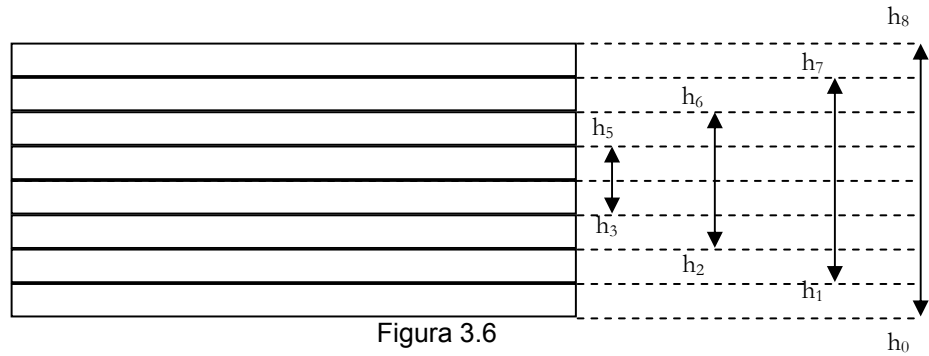


Figura 3.6

$$[N] = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h}^h \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{i=1}^{N_0} \int_{h_{i-1}}^{h_i} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_i dz \tag{III.45}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h}^h \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{i=1}^{N_0} \int_{h_{i-1}}^{h_i} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_i z dz \quad (\text{III.46})$$

Sostituendo, quindi, le (III.43) nelle (III.45), si ottiene, scrivendo in forma contratta:

$$[N] = \sum_{i=1}^{N_0} \left[ \int_{h_{i-1}}^{h_i} [\bar{Q}]_i [\varepsilon^\circ] dz + \int_{h_{i-1}}^{h_i} [\bar{Q}]_i [K] z dz \right]$$

$$[M] = \sum_{i=1}^{N_0} \left[ \int_{h_{i-1}}^{h_i} [\bar{Q}]_i [\varepsilon^\circ] z dz + \int_{h_{i-1}}^{h_i} [\bar{Q}]_i [K] z^2 dz \right]$$

Dato che le matrici  $[\varepsilon^\circ]$  e  $[K]$  non sono funzioni di  $z$  e sono indipendenti da  $i$ , in quanto valori rilevati sulla superficie media del laminato e  $Q_i$  è indipendente da  $z$  in ciascuna lamina, possono essere portati fuori integrale, e le relazioni, tenendo presente che valgono le posizioni:

$$A_{jl} = \sum_{i=1}^{N_0} (\bar{Q}_{jl})_i (h_i - h_{i-1})$$

$$B_{jl} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} (\bar{Q}_{jl})_i (h_i^2 - h_{i-1}^2) \quad (\text{III.47})$$

$$D_{jl} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_0} (\bar{Q}_{jl})_i (h_i^3 - h_{i-1}^3)$$

possono essere scritte:

$$[N] = [A][\varepsilon^\circ] + [B][K] \quad (\text{III.48})$$

$$[M] = [B][\varepsilon^\circ] + [D][K] \quad (\text{III.49})$$

dove le matrici  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[D]$  sono definite dagli elementi generici  $A_{jl}$ ,  $B_{jl}$ ,  $D_{jl}$ .

L'equazione costitutiva del laminato, può quindi scriversi in forma simbolica come:

$$\begin{bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^\circ \\ K \end{bmatrix} \quad (\text{III.50})$$

Questa relazione calcola i carichi per unità di larghezza conoscendo le deformazioni del piano medio del laminato; nei casi reali sono generalmente noti i carichi, i momenti e le forze applicate agenti sulla struttura e si desidera conoscere le



deformazioni indotte: bisogna quindi invertire la (III.50).

Per fare questo si opera nel modo seguente: esprimiamo la (III.48) in funzione di  $[\varepsilon^\circ]$  ed otteniamo:

$$[\varepsilon^\circ] = [A]^{-1}[N] - [A]^{-1}[B][K] \quad (\text{III.51})$$

Sostituendo quindi nella (III.49) si ha:

$$[M] = [B][A]^{-1}[N] + (-[B][A]^{-1}[B] + [D])[K] \quad (\text{III.52})$$

Posto:

$$\begin{aligned} [A^*] &= [A]^{-1} \\ [B^*] &= -[A]^{-1}[B] \\ [H^*] &= [B][A]^{-1} \\ [D^*] &= [D] - [B][A]^{-1}[B] \end{aligned}$$

le (III.51) e le (III.52) si scrivono come:

$$[\varepsilon^\circ] = [A^*][N] + [B^*][K] \quad (\text{III.53})$$

$$[M] = [H^*][N] + [D^*][K] \quad (\text{III.54})$$

Risolvendo la (III.54) rispetto a  $[K]$  e sostituendo nella (III.53), si ha:

$$[\varepsilon^\circ] = [B^*][D^*]^{-1}[M] + ([A^*] - [B^*][D^*]^{-1}[H^*])[N] \quad (\text{III.55})$$

Posto:

$$\begin{aligned} [A'] &= [A^*] - [B^*][D^*]^{-1}[H^*] \\ [B'] &= [B^*][D^*]^{-1} \\ [D'] &= [D^*]^{-1} \\ [H'] &= [D^*]^{-1}[B^*] \end{aligned}$$

la (III.55) fornisce:

$$[\varepsilon^\circ] = [A'][N] + [B'][M]$$

e, analogamente

$$[K] = [H'][N] + [D'][M]$$

ed, in forma compatta, sarà:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^\circ \\ \dots \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ \dots & \dots \\ H' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{bmatrix} \quad (\text{III.56})$$

Questa relazione è quella fondamentale per la progettazione di un laminato; noti infatti i carichi esterni  $M$  ed  $N$ , si ricavano le deformazioni nel piano medio del laminato e da queste, con le (III.43) si ricavano le tensioni in ciascuna lamina.

### 3.7 LAMINATI PARTICOLARI

Dall'analisi dell'equazione costitutiva del laminato, nella forma (III.50), o (III.56), si rileva come l'applicazione di un momento provochi oltre ad una deformazione di curvatura, una deformazione da taglio e da sforzo normale; analogamente, l'applicazione di uno sforzo normale, provoca anche una deformazione torsionale e flessionale. Una situazione del genere è sicuramente incompatibile con l'utilizzo dei laminati; si possono però eliminare almeno in parte questi effetti di accoppiamento realizzando dei laminati con un'opportuna disposizione di lamina.

Consideriamo il piano medio di un laminato e su questo poniamo l'origine dell'asse  $z$ , come mostrato in figura 3.7:

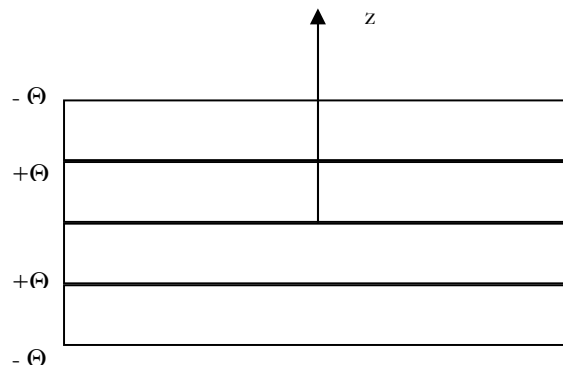


Figura 3.7

E' facile notare, considerando l'elemento generico della matrice  $[B]$ , cioè:

$$B_{jl} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} (\overline{Q}_{jl})_i (h_i^2 - h_{i-1}^2)$$

che esso è nullo se lamine di stesso materiale, spessore ed angolazione, vengono disposte simmetricamente rispetto al piano medio del laminato: infatti, per ogni coppia di lamine, disposta simmetricamente, si ha che sono uguali i termini  $Q_{jl}$ , mentre assume valore uguale ed opposto il termine  $(h_i^2 - h_{i-1}^2)$ ; un laminato siffatto è detto simmetrico. Si può quindi dire che in un laminato simmetrico, si è eliminato l'effetto di accoppiamento tra i momenti ed i carichi normali.

Le equazioni (III.50) e (III.56) divengono:

$$\begin{bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \dots \\ K \end{bmatrix} \quad (\text{III.50 bis})$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \dots \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & B' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{bmatrix}$$

Dalla (III.50 bis) si ricava facilmente:

$$[N] = [A][\varepsilon^0]$$

che, scritta in forma estesa, fornisce:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.57})$$

Si nota che, un laminato simmetrico non ha ancora un comportamento ortotropo: dalla relazione matriciale (III.57), si può, infatti, scrivere:

$$N_x = A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + A_{16}\gamma_{xy}^0$$

Esistono ancora effetti di mutua induzione tra i carichi nel piano, poiché si ha, nel caso dei laminati simmetrici, una deformazione di taglio una volta applicato un carico normale.

Per eliminare tali effetti bisogna annullare i termini  $A_{16}$  ed  $A_{26}$ ; se si considera l'espressione del termine generica  $A_{jl}$ , si ha:

$$A_{jl} = \sum_{i=1}^{N_0} (\bar{Q}_{jl})_i (h_i - h_{i-1})$$

dove il termine  $(h_i - h_{i-1})$  è sempre positivo. Se si osserva che l'inversione del segno dell'angolo  $\vartheta_i$  comporta l'inversione dei segni dei termini  $Q_{16}$  e  $Q_{26}$ , risulta che, per due lamine disposte da lati opposti rispetto al piano medio del laminato dello stesso materiale e spessore ma con orientazione opposta, il termine  $(h_i - h_{i-1})$  è uguale, mentre uguali ed opposti sono i termini  $(Q_{16})_i$  e  $(Q_{26})_i$ .

Pertanto, se si dispongono tante lamine a  $+\vartheta$  per quante sono quelle disposte a  $-\vartheta$ , i termini  $A_{16}$  ed  $A_{26}$ , sono nulli.

Un laminato che verifica questa condizione è detto equilibrato.

L'equazione di un laminato simmetrico ed equilibrato è quindi:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.58})$$

In modo analogo si può dire che, a partire dalla (III.50 bis) per i momenti, si ha:

$$[M] = [D][K]$$

ed, in forma estesa:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.59})$$

Perché il materiale possa ritenersi ortotropo, rispetto ai momenti, deve accadere che i termini  $D_{16}$  e  $D_{26}$  si annullino; considerando l'espressione del termine generico della matrice  $[D]$  si ha:

$$D_{jl} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_0} (\bar{Q}_{jl})_i (h_{i-1}^3 - h_i^3)$$

essendo la differenza  $(h_{i-1}^3 - h_i^3)$  sempre positiva, ed essendo per due lamine disposte simmetricamente ma con orientazione opposta i termini  $Q_{16}$  e  $Q_{26}$  di segno contrario, risulta che per un laminato del tipo  $+ \theta / - \theta // + \theta / - \theta$ , detto emisimmetrico, i termini  $D_{16}$  e  $D_{26}$  sono nulli; è chiaro che per un siffatto laminato non possono essere rispettate le condizioni di simmetria e quindi non sono stati eliminati gli effetti di accoppiamento tra carichi nel piano ed i momenti.

Si nota che, ferme restando le condizioni di simmetria, si possono rendere minimi gli effetti di accoppiamento fuori dal piano, facendo in modo che i termini  $D_{16}$  e  $D_{26}$  acquistino un valore particolarmente basso: questo accade allontanando le lamine dal piano medio del laminato, creando così le strutture *sandwich*, in cui si pone al centro del laminato un *core*, in genere a nido d'ape, o schiuma polimerica, che ha solo la funzione di legare le due parti simmetriche del laminato.

Menzione particolare merita il laminato formato da sole due lamine orientate a  $0^\circ$  e  $90^\circ$ : tale laminato detto comunemente *cross-ply* gode di ortotropia speciale, essendo contemporaneamente nulli i termini  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $D_{16}$  e  $D_{26}$ .

Tabella 3.3 - Proprietà tipiche di lamine unidirezionali a fibre continue. Volume relativo di fibre  $V_f = 0.6$ . Sono riportati per confronto i dati per l'acciaio e l'alluminio

<b>Tipo di fibra</b>	<b>Densità (g/cm<sup>3</sup>)</b>	<b>Modulo longitud. (GPa)</b>	<b>Modulo trasvers. (GPa)</b>	<b>Modulo long. spec. (10<sup>7</sup> m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>)</b>
Vetro E	2.00	43.5	9	2.17
Vetro S	1.98	51.7	10	2.61
HP-PE	1.08	52.2	8	4.83
Aramide	1.36	78-111	6-8	5.7-8.2
Carbonio HS	1.56	138	11	8.85
Carbonio HM	1.62	243	8	15.0
Carbonio UHM	1.68	344	6	20.5
Acciaio	7.85	210	210	2.68
Alluminio	2.78	70	70	2.52

## CAPITOLO 4

### APPROCCIO ANALITICO

#### 4.1 ASPETTI GENERALI

In questa sezione viene illustrato il procedimento utilizzato per la realizzazione del codice di calcolo realizzato in ambiente Matlab per dimensionamento e verifica di tubi in materiale composito.

La funzione del codice è quella di fornire, inseriti i dati di progetto necessari, lo spessore del tubo se viene assegnato il carico di rottura, oppure, la pressione massima interna a cui può resistere, se assegnato lo spessore.

La teoria utilizzata per quanto riguarda la determinazione delle proprietà meccaniche della lamina  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$ , e la sua composizione volumetrica si basa sulla micromeccanica della lamina. Queste si determinano partendo dalla conoscenza delle caratteristiche relative alle fibre ( $E_f$ ,  $G_f$ ,  $\nu_f$ ,  $V_f$ ) e alla matrice ( $E_m$ ,  $G_m$ ,  $\nu_m$ ,  $V_m$ ) che costituiscono la lamina in esame mediante le equazioni:

$$E_{11} = E_f V_f + E_m V_m \quad (\text{IV.1})$$

$$\frac{E_{22}}{E_m} = \frac{1 + \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (\text{II.61})$$

in cui:

$$\eta = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + 2} \quad (\text{II.62})$$

$$\frac{G_{12}}{G_m} = \frac{1 + 2\eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (\text{II.63})$$

in cui:

$$\eta = \frac{\frac{G_f}{G_m} - 1}{\frac{G_f}{G_m} + 1} \quad (\text{II.64})$$

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (\text{II.26})$$

$$\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}} \quad (\text{II.63})$$

Determinati  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$ , tenendo presente quanto sopra esposto circa il fatto che la lamina è considerata omogenea ed ortotropa e, a causa del suo spessore molto piccolo rispetto alle altre due dimensioni in modo che il suo stato tensionale possa ritenersi piano, cioè:

$$\sigma_3 = 0$$

$$\tau_{23} = 0$$

$$\tau_{31} = 0$$

dove la direzione 3 è ortogonale alle direzioni 1, delle fibre, e 2, ortogonale ad 1.

Questo comporta:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

dove:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} \cdot E_{22}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

Considerato poi un sistema di assi di riferimento generico x-y (figura 4.1)

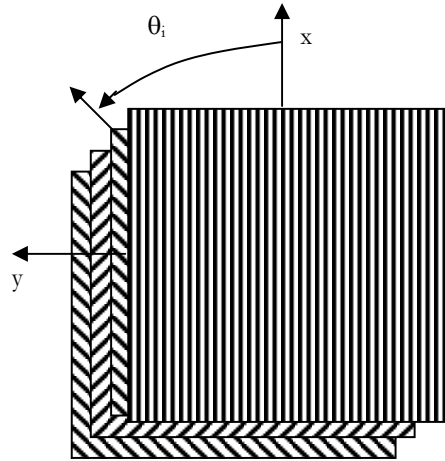


Figura 4.1

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & (m^2 - n^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & (m^2 - n^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

con :

$$m = \cos \vartheta$$

$$n = \sin \vartheta$$

Quindi si ha, come visto sopra:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & (m^2 - n^2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & (m^2 - n^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

Le equazioni appena riportate soddisfano completamente la necessità di modellazione del comportamento elastico della lamina.

Ovviamente, esse conservano la loro validità nell'ipotesi di elasticità lineare del materiale. L'esperienza ha ampiamente mostrato che una lamina in un composito per uso tecnico conserva il suo comportamento hookeano fino alla rottura quando è



caricata secondo la direzione delle fibre; per carichi in direzione trasversale la curva  $\sigma-\varepsilon$  è leggermente non lineare, ma generalmente ben descritta da una retta; infine, per sollecitazioni di tipo tagliante si registrano, prima della rottura, spiccate non linearità che si traducono in una variazione del modulo di taglio.

Quest'ultimo tipo di risposta introduce un errore nelle previsioni teoriche, errore che generalmente viene trascurato nei codici di calcolo.

Si pone il problema di descrivere, analogamente per quanto visto per una lamina, il comportamento elastico di un laminato, ossia di un composito ottenuto sovrapponendo lamine ortotrope di cui siano note le proprietà elastiche e gli spessori.

Questo problema viene risolto, come visto in precedenza, dalla teoria della laminazione che propone la seguente relazione tra i carichi e i momenti esterni,  $N_i$  e  $M_i$ , e le deformazioni e le curvature sul piano di riferimento,  $\varepsilon_{oi}$  e  $k_i$ :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{ox} \\ \varepsilon_{oy} \\ \gamma_{oxy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

Dove  $N_i$  sono i carichi esterni per unità di larghezza, da cui le *sollecitazioni medie*, ad essi dovute, sono calcolabili mediante le relazioni:

$$\sigma_{xm} = \frac{N_x}{t} \quad (\text{IV.12a})$$

$$\sigma_{ym} = \frac{N_y}{t} \quad (\text{IV.12b})$$

$$\tau_{xym} = \frac{N_{xy}}{t} \quad (\text{IV.12c})$$

con  $t$  che rappresenta lo spessore del laminato.

Il termine *sollecitazioni medie*, utilizzato per descrivere i valori calcolati attraverso le eq.i (IV.12a), (IV.12b), (IV.12c), vuole marcare il fatto che tali sollecitazioni non vanno confuse con quelle che insorgono nelle singole lamine del laminato, indicate in precedenza con i simboli  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ .

Le  $M_i$  nell'eq. (IV.11) sono i momenti per unità di larghezza, mentre le quantità  $A_{ij}$ ,

$B_{ij}$ ,  $D_i$ , dipendono dalle proprietà, dalla geometria e dalla posizione delle singole lamine che compongono il laminato e ne rappresentano fisicamente le rigidità.

L'eq. (IV.11) si semplifica notevolmente sotto alcune condizioni, che sono rilevanti nel caso di gusci cilindrici ottenuti per *Filament Winding* e destinati ai recipienti in pressione.

Nella quasi totalità dei casi, tali gusci sono infatti simmetrici, tali cioè che il piano medio sia di simmetria per la struttura del materiale. In questa ipotesi si ha:

$$B_{ij} = 0$$

per cui l'eq. (IV.11) si separa nelle seguenti due relazioni:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

I manufatti fabbricati per avvolgimento sono inoltre quasi invariabilmente equilibrati, se come asse x si assume quello coincidente con l'asse della struttura cilindrica. Il termine equilibrato indica che ad ogni lamina in cui le fibre sono orientate a un dato angolo  $\vartheta$ , ne corrisponde una avente le stesse proprietà elastiche e lo stesso spessore orientata a  $-\vartheta$ . Per un laminato equilibrato, oltre che simmetrico, l'eq. (III.21) si riduce a:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

per cui, in assenza di momenti esterni  $M_i$ , il comportamento elastico è governato da sole quattro costanti elastiche rappresentate dalle  $A_{ij}$  nell'eq. (III.23). tali costanti sono calcolabili attraverso le relazioni:

$$A_{11} = \sum_{k=1}^n Q_{11}^- t_k \quad (\text{IV.13a})$$

$$A_{12} = \sum_{k=1}^n Q_{12}^- t_k \quad (\text{IV.13b})$$

$$A_{22} = \sum_{k=1}^n Q_{22}^- \cdot t_k \quad (\text{IV.13c})$$

$$A_{33} = \sum_{k=1}^n Q_{33}^- \cdot t_k \quad (\text{IV.13d})$$

in cui  $n$  è il numero totale di lamine e  $k$  si riferisce alla generica lamina  $k$ -esima.

E' importante dire che i termini  $A_{ij}$  sono indipendenti dalla posizione delle singole lamine nel laminato. Da un punto di vista fisico questo indica che, disponendo per la costruzione del laminato di un certo numero di lamine ognuna caratterizzata da una certa orientazione, le  $A_{ij}$  saranno le stesse qualunque sia l'ordine di sovrapposizione delle lamine stesse (sequenza di laminazione). Inoltre, se ci sono più lamine aventi la stesso orientazione e le stesse proprietà elastiche, nel calcolo delle  $A_{ij}$  esse potranno essere considerate come una sola lamina di spessore pari alla somma dei loro spessori.

Applicando al laminato, in analogia a quanto visto per la lamina, le definizioni di moduli elastici:

$$E_x = \frac{\sigma_{xm}}{\varepsilon_{0x}} \quad (\text{IV.13})$$

$$E_y = \frac{\sigma_{ym}}{\varepsilon_{0y}} \quad (\text{IV.14})$$

$$G_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{0xy}} \quad (\text{IV.15})$$

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_{0y}}{\varepsilon_{0x}} \quad (\text{IV.16})$$

e tenendo conto delle eq.i (IV.12a), (IV.12b), (IV.12c), dall'eq.(III.23) si ottengono facilmente le seguenti relazioni:

$$E_x = \frac{A_{11} \cdot A_{22} - A_{12}^2}{t \cdot A_{22}} \quad (\text{IV.17})$$

$$E_y = \frac{A_{11} \cdot A_{22} - A_{12}^2}{t \cdot A_{11}} \quad (\text{IV.18})$$

$$G_{xy} = \frac{A_{33}}{t} \quad (\text{IV.19})$$

$$\nu_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \quad (\text{IV.20})$$

che aiutano a comprendere il significato fisico degli elementi  $A_{ij}$ .

#### 4.2 RESISTENZA A PRIMA ROTTURA

Poiché un generico laminato composito è formato da lamine a comportamento sostanzialmente elastico lineare fino a rottura, le formule di elasticità ricordate in precedenza consentono di prevederne con buona approssimazione il comportamento nella prima fase di carico, cioè fino al punto in cui almeno una delle lamine giunga al collasso.

Raramente la rottura di una lamina comporta il cedimento ultimo dell'intero laminato. Più spesso, dopo la prima rottura si verifica una perdita di rigidità, ma l'incremento di carico sopportabile prima della rottura ultima è spesso considerevole. Poiché la prima rottura pregiudica però l'integrità strutturale, questo evento può essere considerato, nel caso di recipienti in pressione, come quello critico nella fase di dimensionamento, in quanto dà luogo a perdite di fluido attraverso la parete.

Poiché i valori di resistenza longitudinale, trasversale e a taglio di una lamina ortotropa generica forniti dalla micromeccanica risultano abbastanza lontani da quelli sperimentali, per la determinazione di queste si fa riferimento a risultati sperimentali ottenuti in laboratorio attraverso la caratterizzazione della lamina di base.

Noti i valori di resistenza in condizioni semplici di carico, si pone il problema di prevedere mediante essi quando un generico laminato cederà sotto un sistema complesso di sollecitazioni.

Sempre nel capitolo III sono stati proposti numerosi criteri di resistenza, simili a quelli impiegati nel campo dei materiali isotropi, che possono essere suddivisi in due grandi categorie:

- criteri di tipo non interattivo
- criteri di tipo interattivo

La differenza fra i due tipi di criteri consiste nel fatto che, nel primo caso, la previsione che la rottura avvenga in una certa direzione è affidata alla sola conoscenza dello stato di sollecitazione (deformazione) lungo la direzione considerata; si suppone quindi che le sollecitazioni (deformazione) in direzioni differenti da quella analizzata non collaborino nell'influenzare la rottura.

I criteri di tipo interattivo partono invece dal presupposto che la conoscenza dell'intero stato di sollecitazione (deformazione) sia necessaria per un giudizio sulla possibilità di rottura. Fra i criteri di tipo non interattivo, il più utilizzato è quello della massima deformazione. Invece, il criterio interattivo maggiormente usato è invece quello di Tsai-Hill. In figura 4.2 sono mostrate le previsioni del criterio di Tsai-Hill e del criterio della massima deformazione nel caso di una lamina unidirezionale a fibre continue con una percentuale volumetrica di fibre del 60% circa.

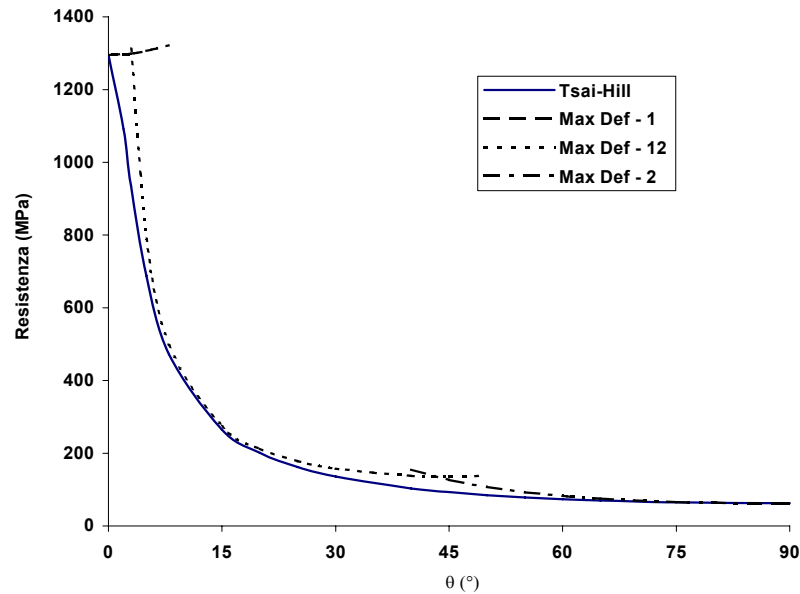


Figura 4.2

In Figura 4.3 le previsioni dei due criteri di resistenza considerati sono confrontate con risultati sperimentali reperibili in letteratura relativi a lamine in boro-epossidica.

Si osserva che il criterio di Tsai-Hill sopravvaluta leggermente la resistenza a trazione, ma è comunque in miglior accordo con i dati rispetto al criterio della massima deformazione.

Da tutti i risultati disponibili si ricava che, contrariamente a quanto previsto dal criterio della massima deformazione, la resistenza della lamina decade in modo monotono, senza la presenza di cuspidi.

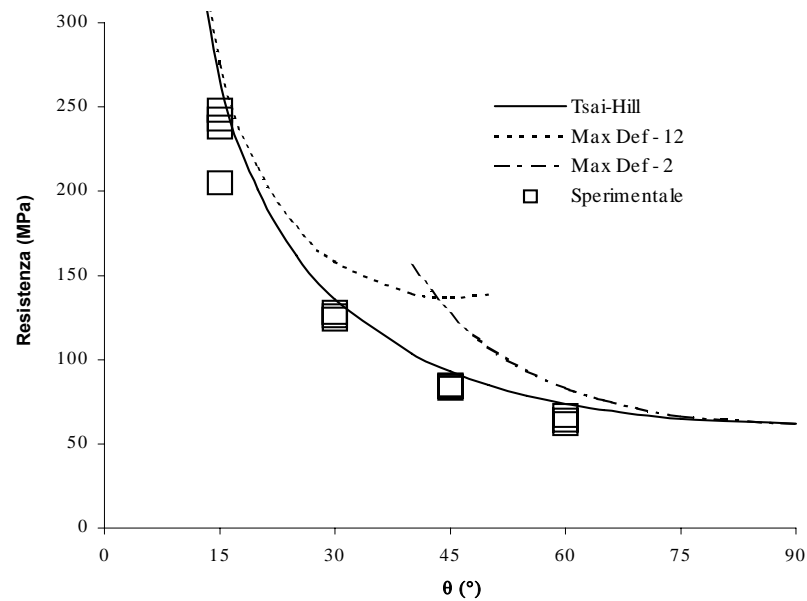


Figura 4.3

In conclusione, quando si vuole valutare la prima rottura di un composito appare giustificata la scelta di criteri interattivi, in questo caso quello di Tsai-Hill, rispetto a quello della massima deformazione, per due ordini di ragioni:

- una migliore aderenza con i risultati disponibili
- la tendenza del criterio di Tsai-Hill a fornire valori in sicurezza rispetto al criterio della massima deformazione.

### 4.3 RESISTENZA A ROTTURA ULTIMA

Come notato in precedenza, il verificarsi della prima rottura in un laminato generico non comporta necessariamente la crisi generale della struttura.

Se ci si riferisce ad esempio a una condizione di carico di tipo monoassiale, la prima rottura riguarda spesso le lamine caratterizzate dall'orientazione  $\theta$  più elevata rispetto alla direzione del carico ed è confinata alla matrice.

Poiché le fibre sono ancora integre, il composito subisce una perdita di modulo più o meno evidente, ma continua a sopportare carico addizionale.

Il carico di rottura ultimo può essere notevolmente più elevato di quello di prima rottura.

In tutti i casi in cui la prima fessurazione della matrice non comporta una perdita di

funzionalità della struttura si registra quindi la necessità di prevedere il comportamento del materiale dopo la prima rottura e in particolare il valore della sollecitazione che ne induce la crisi irreversibile.

Da un punto di vista analitico, la necessità appena evidenziata si traduce nella domanda: come si comporta una lamina dopo la prima rottura?

Naturalmente, l'ipotesi di comportamento elastico lineare è violata in questo caso, per cui la stessa applicabilità della teoria della laminazione, che fonda su questa assunzione, diviene discutibile.

In letteratura sono prevalentemente applicati due metodi, rispettivamente indicati nel seguito come “*metodo dell'eliminazione completa*” e “*metodo dell'eliminazione parziale*”, per la previsione della resistenza ultima di un laminato. Entrambi utilizzano la teoria della laminazione anche dopo il primo cedimento, modellando però in maniera differente il comportamento delle lamine rotte.

Comune a entrambi i metodi è la modellazione del laminato precedentemente alla prima rottura.

Il laminato è trattato come un materiale omogeneo, le cui proprietà elastiche vengono calcolate con la teoria della laminazione.

Quest'ultima è impiegata per il calcolo delle sollecitazioni nelle differenti lamine, in accordo alle procedure richiamate precedentemente in questa relazione.

Viene applicato a tutte le lamine un opportuno criterio di resistenza per determinare la lamina che cederà per prima e il carico critico per questo evento.

Al di là di questo punto i due metodi tengono conto della rottura in modo differente.

Nel metodo dell'eliminazione completa, una volta verificata la rottura di una lamina, si suppone che tale lamina non contribuisca ulteriormente alle proprietà elastiche del laminato. Per simulare questo comportamento, tutte le costanti elastiche della lamina rotta vengono azzerate.

Il metodo dell'eliminazione parziale vuole invece tener conto del fatto che, se si verifica una rottura nella matrice, le fibre continuano comunque a collaborare alla rigidità globale.

A tal fine, tale metodo azzerava i moduli  $E_2$  e  $G_{12}$  (proprietà dipendenti dalla matrice) se si verifica una rottura nella resina, e il modulo  $E_1$  (proprietà dipendente dalle fibre) se la rottura riguarda le fibre.

Naturalmente, questo significa che, contrariamente al caso dell'eliminazione completa, il criterio di resistenza adottato deve dare indicazioni non soltanto sulle

sollecitazioni che determinano la condizione di crisi nella lamina, ma anche sul tipo di rottura che si sviluppa in essa.

Si è rilevato in precedenza che, mentre il criterio della massima deformazione dà informazioni sul tipo di rottura atteso, quello di *Tsai-Hill* non fa altrettanto proprio per la sua natura interattiva. Tuttavia, la forma dell'eq.(III.35) fa immediatamente comprendere che l'importanza relativa delle sollecitazioni  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\tau_{12}$  nel provocare la rottura è data dal valore delle quantità in parentesi tonda. Di conseguenza, un metodo spesso impiegato per distinguere rotture nelle fibre o nella matrice è l'esame di tali quantità: si assume che si abbia rottura nelle fibre, per sollecitazione normale nella matrice o per taglio nella matrice secondo che il termine maggiore sia rispettivamente  $(\sigma_1/X^*)^2$ ,  $(\sigma_2/Y^*)^2$ , o  $(\tau_{12}/S)^2$ .

Il laminato dopo la prima rottura viene considerato come un nuovo laminato, anch'esso a comportamento elastico lineare, di rigidezza ridotta, e viene re analizzato attraverso la teoria della laminazione per la ricerca delle condizioni di rottura successive.

Il ciclo procede fino a quando in tutte le lamine si sia verificato almeno un tipo di rottura.

Nessuna delle teorie attualmente disponibili per il calcolo del comportamento di un laminato al di là della prima rottura è del tutto affidabile.

Nell'eseguire i calcoli di ottimizzazione, in questo lavoro si assumerà l'ipotesi dell'eliminazione parziale, e si assumerà che nella lamina in condizioni di crisi si abbia rottura nelle fibre o nella matrice a seconda che si verifichi la prima o la seconda delle due disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{1r}} \right)^2 &> \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_{2r}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{\tau_{12r}} \right)^2 \\ \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{1r}} \right)^2 &< \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_{2r}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{\tau_{12r}} \right)^2 \end{aligned} \quad (IV.21)$$

#### 4.4 CONDIZIONI DI CARICO AGENTI NEI RECIPIENTI IN PRESSIONE

Nel mantello cilindrico di un recipiente in pressione possono verificarsi, nella zona sufficientemente lontana dai vincoli (che interessa ai fini del presente lavoro), due situazioni di carico estreme:

- la pressione interna genera una sollecitazione unicamente



circonferenziale;

- la pressione interna genera una sollecitazione radiale e una sollecitazione assiale.

Il primo caso si verifica quando siano trattati tubi senza fondi, supportati in modo tale da permetterne l'allungamento libero in direzione assiale.

Il secondo caso corrisponde a un recipiente con fondi.

Fra questi due estremi si colloca una casistica intermedia, che comprende tubi senza fondi, ma vincolati in modo tale che l'allungamento assiale sia parzialmente o totalmente impedito.

Indipendentemente dal tipo di vincolo, le sollecitazioni sono determinate in base a considerazioni di equilibrio, in quanto tali applicabili indipendentemente dalla natura isotropa o anisotropa del materiale. Per determinare gli stress longitudinali, eseguendo un taglio lungo la sezione del tubo (figura 4.4), affinché il corpo libero sia in equilibrio statico, gli stress lungo le pareti devono equilibrare la pressione interna, quindi, indicando con  $x$  la direzione longitudinale, si ha:

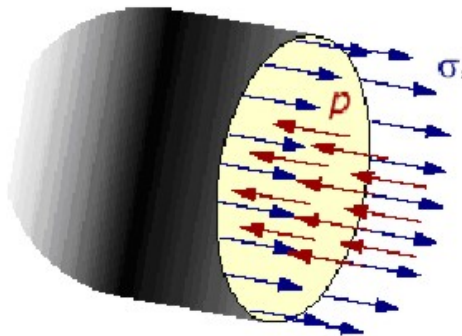


Figura 4.4

$$\sigma_{xm} \cdot t \cdot \pi D = p \cdot \pi \frac{D^2}{4} \Rightarrow \sigma_{xm} = \frac{pD}{4t} \quad (\text{IV.22})$$

dove  $p$  è la pressione critica del fluido (cioè quella che provoca la rottura) e  $D$  il diametro del cilindro,  $t$  il suo spessore.

Per determinare le tensioni circonferenziali (figura 4.5), si esegue un taglio lungo l'asse longitudinale e si considera una piccola fetta del mantello cilindrico. Affinché il corpo libero sia in equilibrio statico, gli stress all'interno dello spessore devono equilibrare la pressione interna, quindi, indicando con  $y$  la direzione

circonferenziale, si ha:

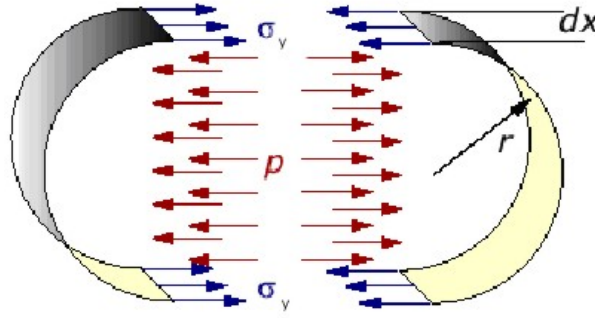


Figura 4.5

$$2 \cdot \sigma_{ym} \cdot t \cdot dx = p \cdot D \cdot dx \Rightarrow \sigma_{ym} = \frac{pD}{2t} \quad (\text{IV.23})$$

Nelle (IV.22) e (IV.23) sono stati usati i simboli  $\sigma_{xm}$  e  $\sigma_{ym}$  per indicare che le sollecitazioni calcolate dalle equazioni sono quelle medie agenti sul laminato, in analogia con le (IV.12a), (IV.12b), (IV.12c).

Tuttavia, nel caso più generale, si può porre:

$$\sigma_{xm} = K \sigma_{ym} \quad (\text{IV.24})$$

dove la costante  $K$  (che sarà indicata nel seguito anche con il termine “rapporto di carico”) sarà dipendente dalle condizioni di vincolo sulla deformazione assiale del cilindro.

Naturalmente, la (IV.24) si specializza nella (IV.23) per  $K = 0.5$ .

Se il laminato è simmetrico, l'eq.(IV.11) si separa nelle eq.(III.21) e (III.23), e si specializza nella (III.58) se il laminato è equilibrato.

Poiché non ci sono momenti esterni applicati, dalla (III.23) si ricava che le curvature sono identicamente nulle.

Si avrà, visto la (IV.9), che le deformazioni a una qualsiasi quota  $z$  rispetto al piano medio coincidono con quelle del piano medio stesso:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{ox} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{oy} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{oxy} \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

Inoltre, poiché non esistono  $\tau_{xym}$ , le  $N_{xy}$  (vedi eq. (IV.12a), (IV.12b), (IV.12c)) sono nulle.

#### 4.5 PROCEDURA DI DIMENSIONAMENTO DELLO SPESSORE

Determinate le proprietà meccaniche della lamina, il numero di orientazioni e le relative percentuali di queste che andranno a costituire il laminato scelto per la realizzazione del tubo, la sua geometria, le condizioni di carico, il codice provvede a:

- calcolare lo spessore ottimale relativo alla prima rottura, corrispondente allo spessore del tubo che, nelle condizioni di carico assegnate, determina il danneggiamento (di norma della matrice) della prima delle lamine (o della lamina, nel caso si abbia una sola orientazione) del laminato;
- calcolare lo spessore ottimale di rottura ultima, corrispondente allo spessore del tubo che, nelle condizioni di carico assegnate, determina la rottura delle fibre della prima delle lamine (o della lamina, nel caso si abbia una sola orientazione), considerando la matrice di queste (questa) già danneggiata.

Il dimensionamento a rottura ultima risulta sensato se lo spessore ottimale relativo alla stessa sia minore di quello di prima rottura. In caso contrario, il codice fornisce come valore dello spessore di rottura ultima quello di prima.

Il codice permette la determinazione dello spessore mediante l'applicazione di un criterio di resistenza a scelta tra *Tsai-Hill*, *Tsai-Wu* e *Hoffman*.

Di seguito i valori calcolati e riportati dai diagrammi fanno riferimento alle proprietà di una lamina base costituita da fibre di vetro e matrice poliestere. In figura 4.6 si riporta il l'andamento calcolato dello spessore di prima ed ultima rottura per un tubo costituito da un laminato realizzato con fibre avvolte a  $\pm\theta$  e rapporto di carico  $K=0,5$ .

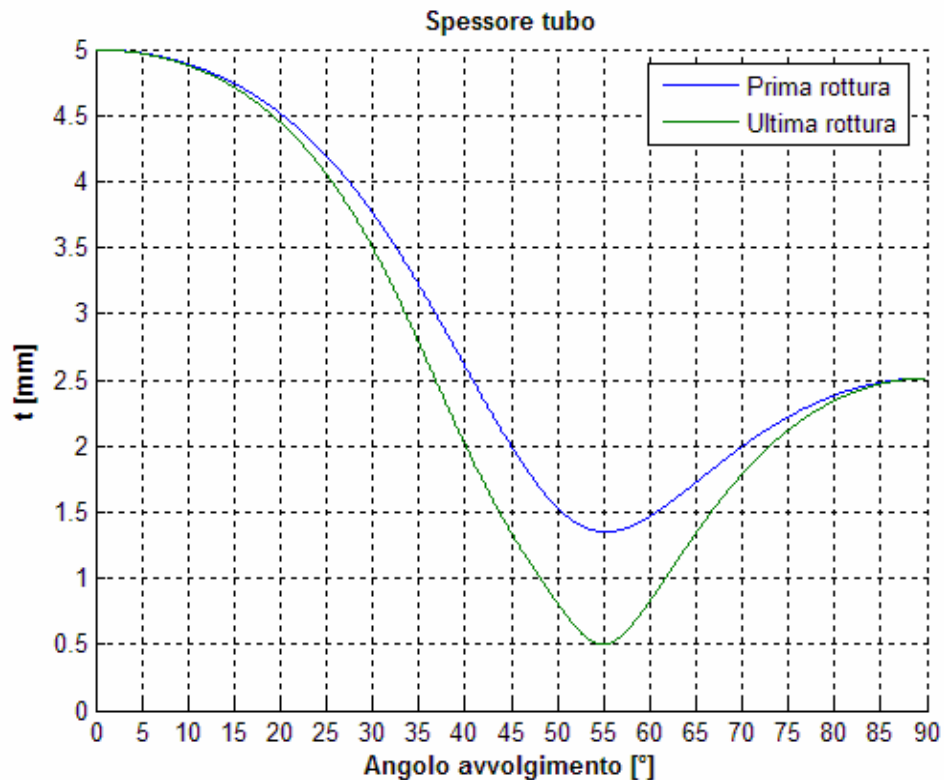


Figura 4.6

Come ci si attendeva, risultati migliori, sia nel dimensionamento a prima che ad ultima rottura, si ottengono per avvolgimenti a  $\pm 55^\circ$ . Inoltre il dimensionamento a rottura ultima non permetterebbe spessori minori di quello a prima rottura per angoli di avvolgimento prossimi a  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

Oltre ai valori dello spessore, il codice fornisce anche i valori delle tensioni circonferenziali e longitudinali relative alla prima ed ultima rottura. Le sopra menzionate tensioni vengono calcolate in condizioni di equilibrio come mostrato in precedenza, in corrispondenza del valore dello spessore determinato (prima o ultima rottura) e delle condizioni di carico applicate. Anche in questo caso, come per lo spessore, il codice fornisce valori delle tensioni di rottura ultima uguali a quelli di prima rottura nel caso i primi risultassero minori dei secondi. Nelle figure 4.7a,b che seguono, si riportano gli andamenti delle tensioni assiali e circonferenziali al variare dell'angolo di avvolgimento per la stessa lamina.

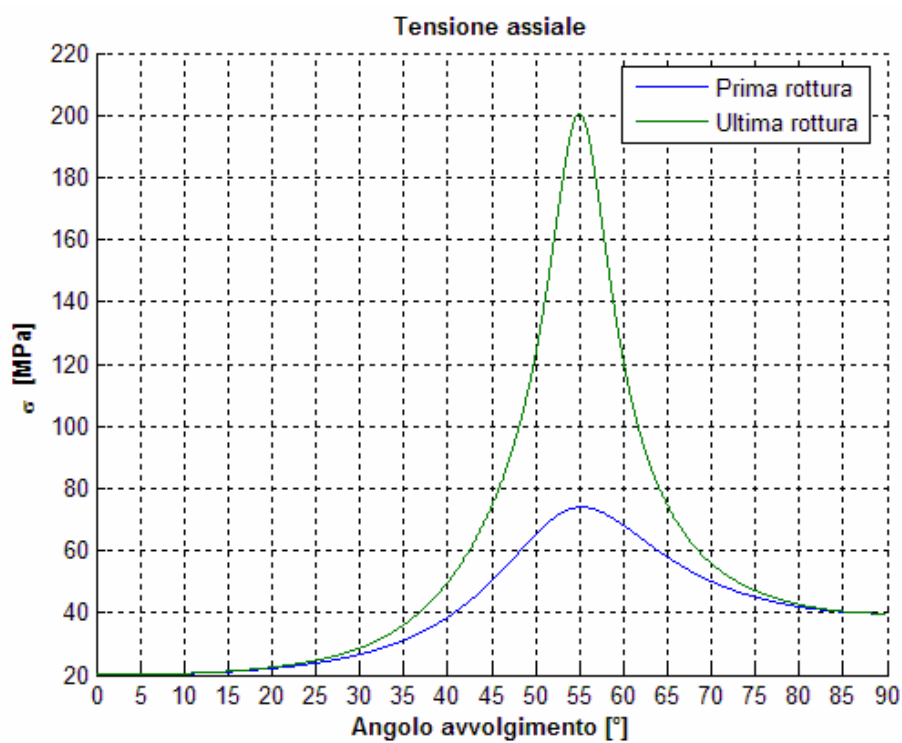


Figura 4.7a

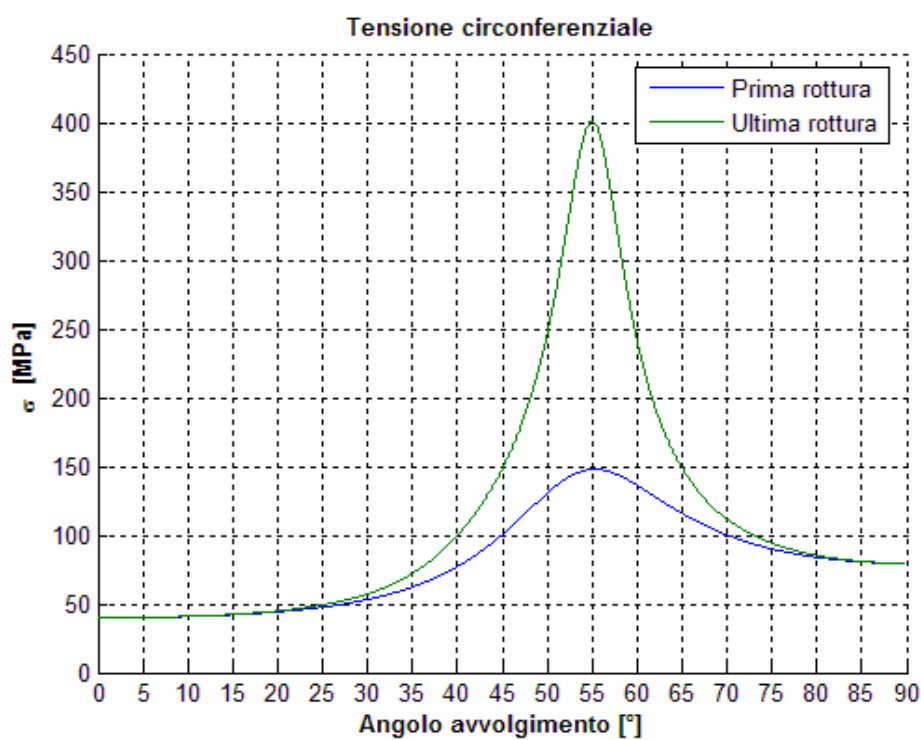


Figura 4.7b

Nelle figure 4.8, 4.9, 4.10 si riportano l'andamento dello spessore, della tensione assiale e circonferenziale, di prima ed ultima rottura, per un tubo costituito da un laminato  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ , al variare della percentuale, nello spessore del laminato, della lamina a  $0^\circ$ . Si deduce che i risultati migliori nel dimensionamento a prima rottura si ottengono usando laminati costituiti dalle tre lamine ( $90^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ) in percentuali rispettivamente del 38,5%, 23%, 38,5%.

Per quanto riguarda il dimensionamento a rottura ultima, la configurazione ottimale calcolata fornisce percentuali del 33,3%, 33,3%, 33,3%. Comunque, il dimensionamento a rottura ultima risulta inefficace per frazioni della lamina a  $0^\circ$  prossime a 0 e ad 1, come mostrano i diagrammi di seguito.

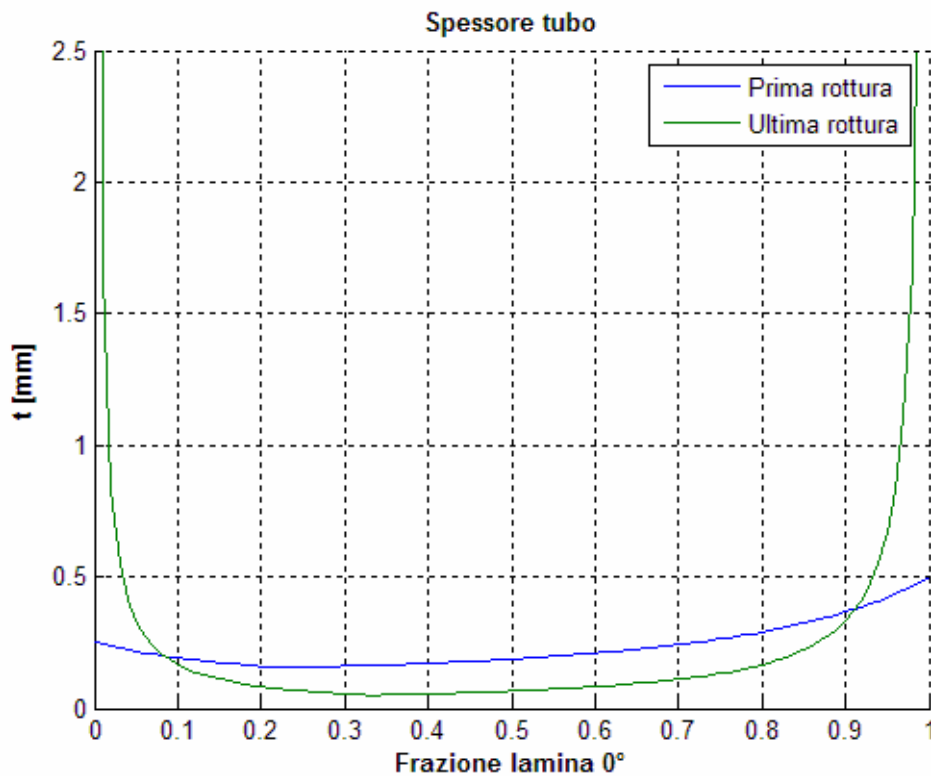


Figura 4.8

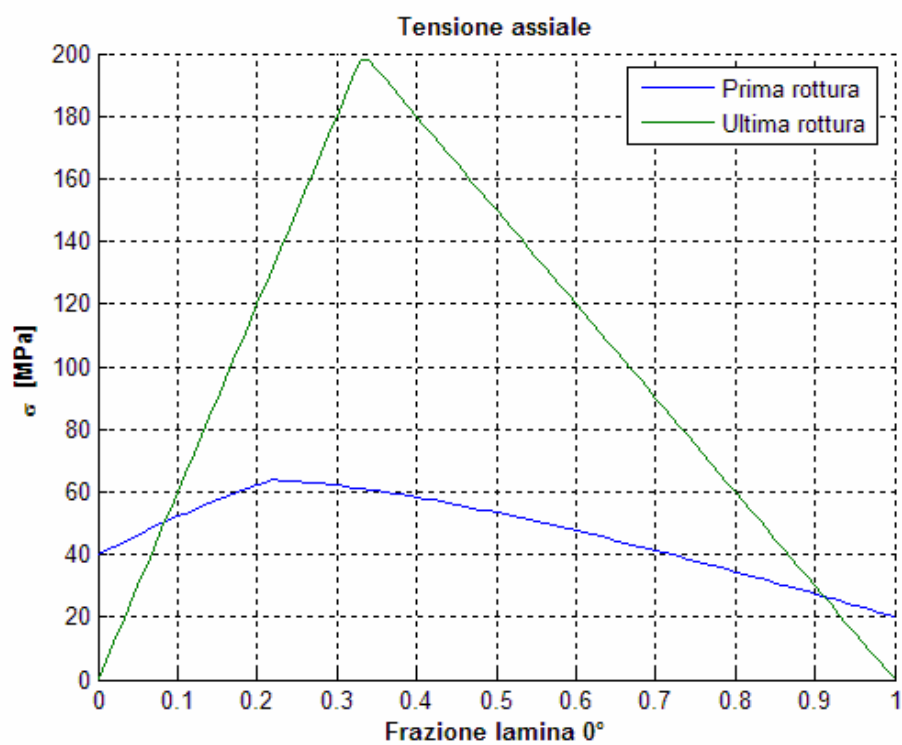


Figura 4.9

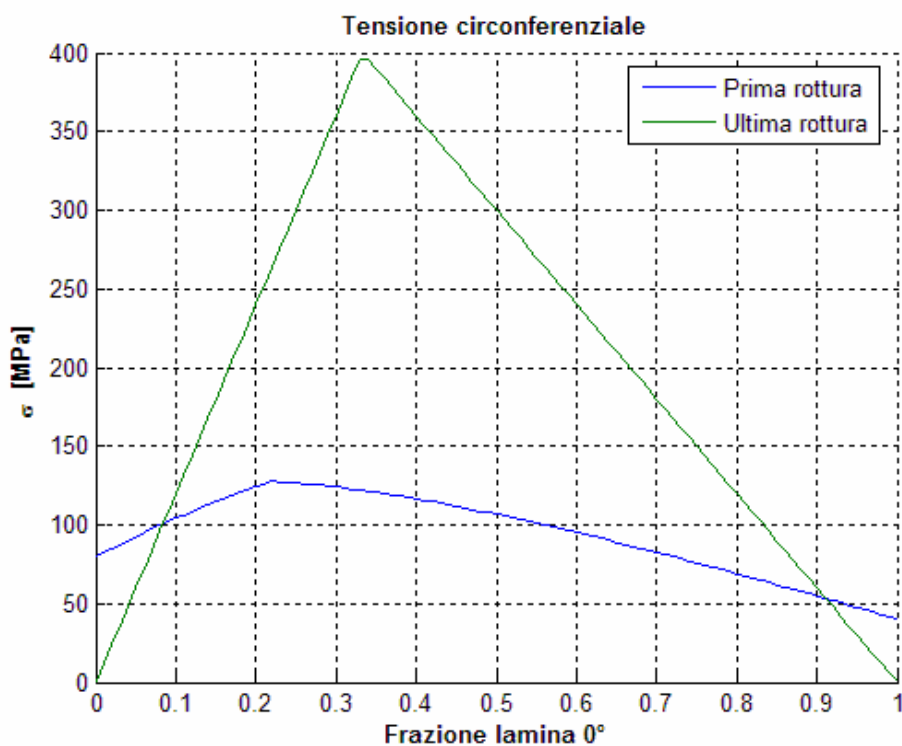


Figura 4.10

#### 4.6 PROCEDURA DI VERIFICA DEL CARICO

Analogamente alla procedura di dimensionamento vista in precedenza, stabiliti i dati di ingresso, tra cui ora figura lo spessore del tubo, il codice provvede a:

- calcolare la pressione interna che determina la prima rottura, cioè quella corrispondente al danneggiamento (di norma della matrice) della prima delle lamine (o della lamina, nel caso si abbia una sola orientazione) del laminato;
- calcolare la pressione interna che determina la rottura ultima, cioè quella corrispondente alla rottura delle fibre della prima delle lamine (o della lamina, nel caso si abbia una sola orientazione), considerando la matrice di queste (questa) già danneggiata.

Anche in questo caso, i valori di pressione interna di ultima rottura sono accettabili quando risultano superiori a quelli relativi alla prima. In caso contrario, il codice assume come valore della pressione di ultima rottura quello relativo alla prima.

Similmente, i criteri di resistenza che possono essere adottati sono quelli di Tsai-Hill, Tsai-Wu e Hoffman.

Di seguito vengono riportati i diagrammi riportanti i valori calcolati della pressione interna e delle tensioni relative ad un tubo costituito da un laminato  $\pm 9$ .

Parimenti all'ottimizzazione, i risultati migliori sono previsti per tubi con avvolgimenti a  $\pm 55^\circ$ , sia nei confronti di prima che di ultima rottura.

I valori delle tensioni forniti dal codice sono riportati di seguito. Queste sono calcolate come già mostrato in precedenza e vale sempre lo stesso criterio di considerare i valori di rottura ultima solo se migliori di quelli di prima.



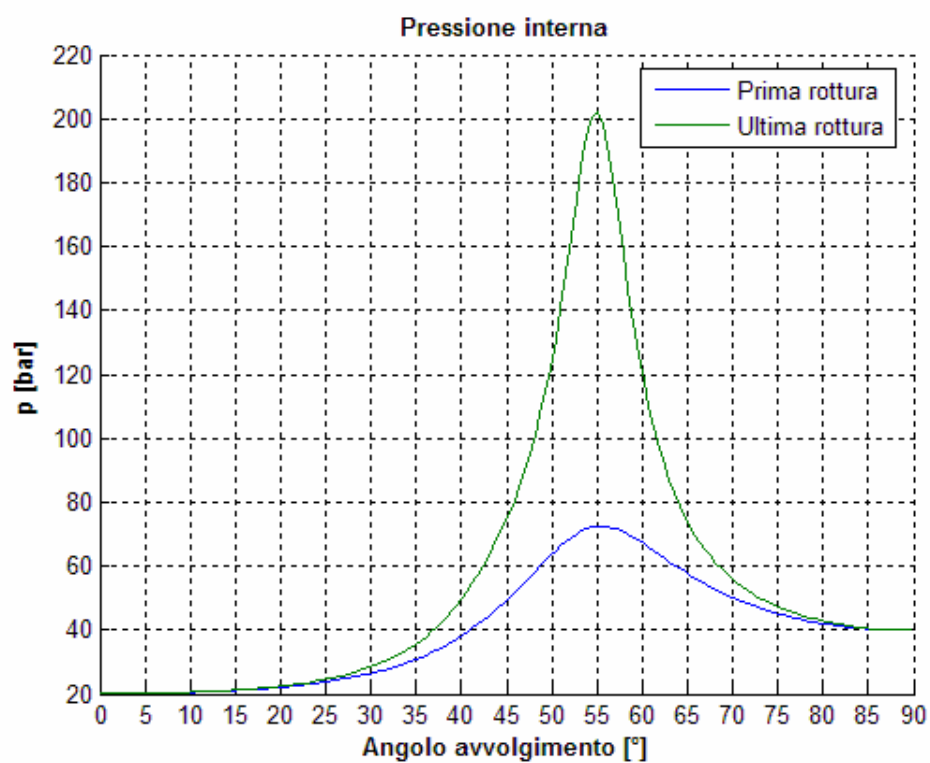


Figura 4.11

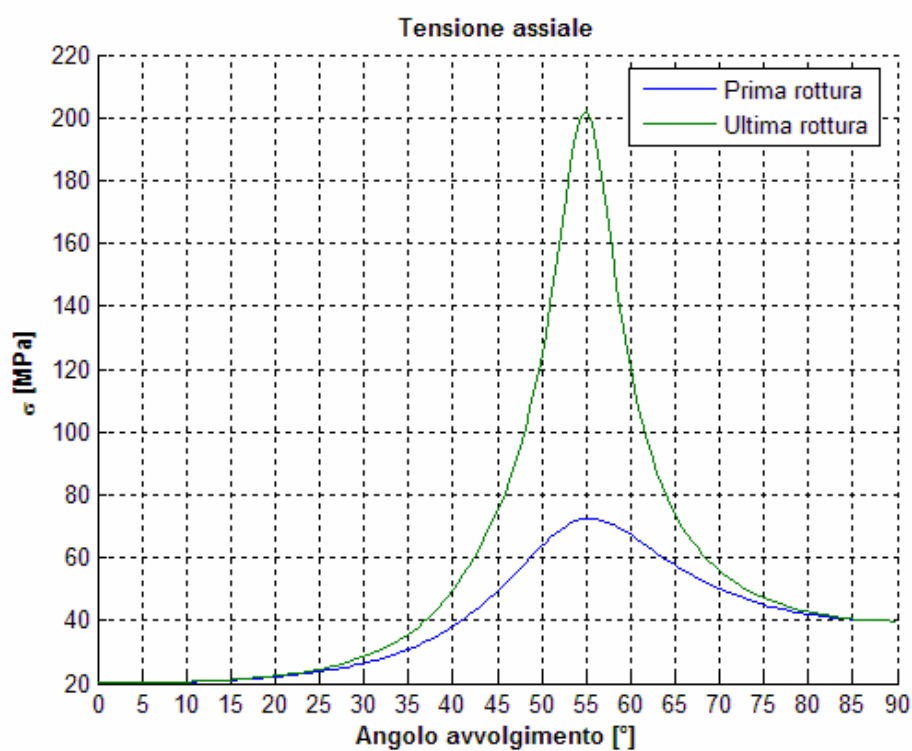


Figura 4.12

I diagrammi che seguono fanno riferimento ai valori calcolati per un tubo con avvolgimento  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ . I risultati migliori, dal punto di vista della verifica della pressione interna di prima e ultima rottura, sono previsti, come nella procedura di dimensionamento dello spessore, per gli stessi valori delle percentuali delle lamine all'interno del laminato.

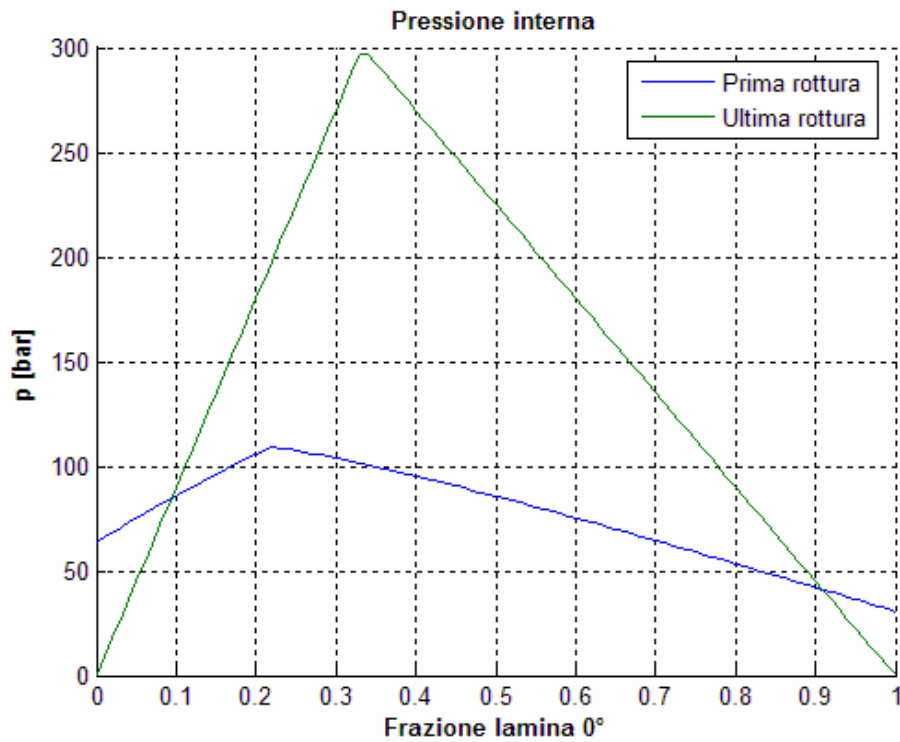


Figura 4.13

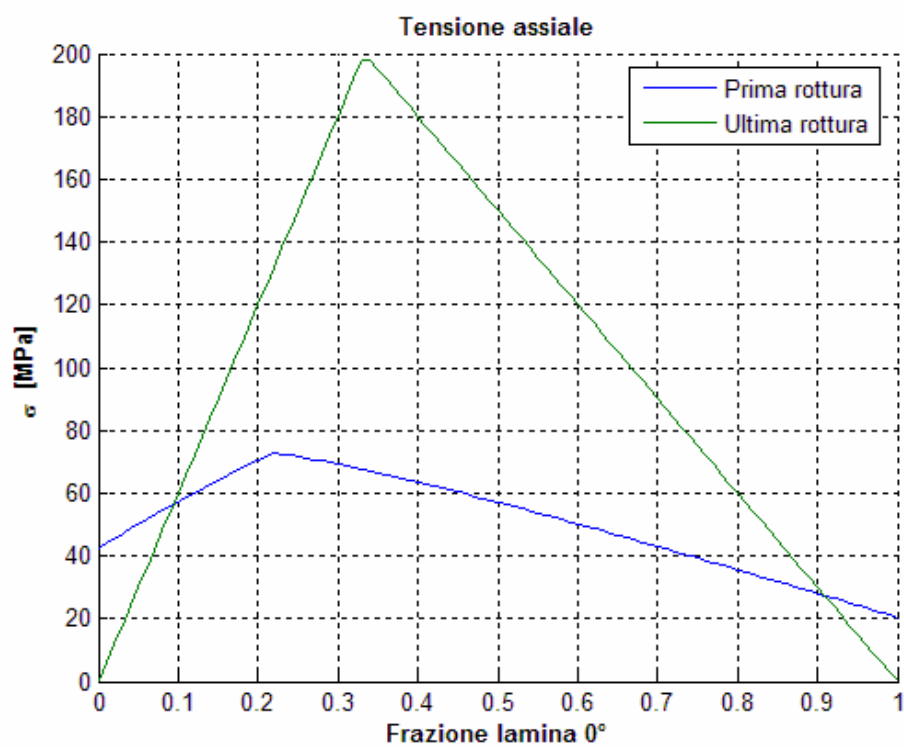


Figura 4.14

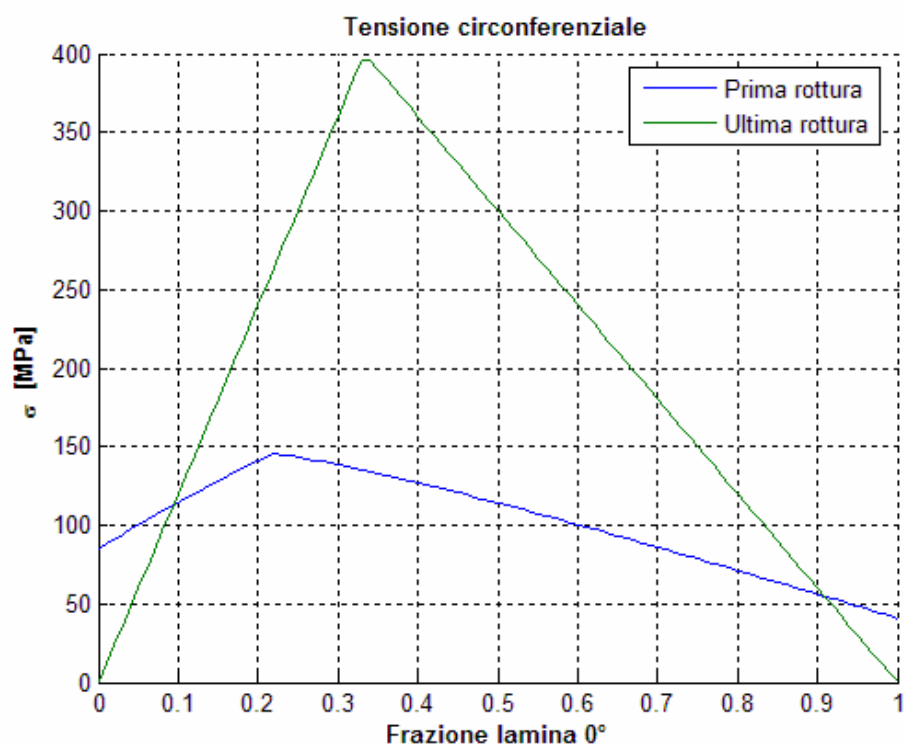


Figura 4.15

#### 4.7 INTERFACCIA GRAFICA DEL CODICE DI CALCOLO

Il codice si presenta, una volta eseguito il file *laminae.exe*, come mostrato in figura 4.16:

**Figure 1**

File Edit View Insert Tools Desktop Window Help

**Università degli Studi di Napoli Federico II**  
**Facoltà di ingegneria**  
**Dipartimento di Ingegneria dei Materiali e della Produzione**  
 Codice di calcolo per il dimensionamento e la verifica  
 di tubi in pressione in materiale composito

Proprietà meccaniche		FIBRA	MATRICE
E [MPa]		70E3	3.0E3
G [MPa]		2.8E4	1.1E3
Percentuale in volume [%]		45	
Rapporto di Poisson		.22	.35

PROPRIETA' LAMINA		Traz.	Compr.
Resistenza longitudinale [MPa]		600	500
Resistenza trasversale [MPa]		40	150
Resistenza a taglio [MPa]		40	
Diametro tubo [mm]		40	
Rapporto di carico		.5	

Calcolo di: Verifica

Spessore laminato [mm] 1.5

Criterio di resistenza Tsai-Hill

**RUN**

LAMINE	
Numero lamine	3
% spess. tot. lamina 1	33 Orientaz. lam. 1 [°] 90
% spess. tot. lamina 2	34 Orientaz. lam. 2 [°] 0
% spess. tot. lamina 3	33 Orientaz. lam. 3 [°] 90

RISULTATI	
Prima rottura matrice lamina 2	
Pressione [bar]	91.19
Tensione assiale [MPa]	60.7933
Tensione circonferenziale [MPa]	121.5867
Rottura matrice in ogni lamina	
Pressione [bar]	108.9
Tensione assiale [MPa]	72.6
Tensione circonferenziale [MPa]	145.2
Rottura fibre lamina 1 3	
Pressione [bar]	271.13
Tensione assiale [MPa]	180.7533
Tensione circonferenziale [MPa]	361.5067

Figura 4.16

Inseriti i vari valori delle grandezze nei diversi campi, come da figura, e, scelto il tipo di calcolo, si esegue il *run*, dopo di che, nella sezione *risultati*, vengono riportati i valori dei dati richiesti.

Si riporta, di seguito, una sintesi delle operazioni eseguite dal codice per le procedure di dimensionamento e di verifica.

#### Dimensionamento

*Valori di input:*

- $E_f$ : modulo elastico fibre (MPa)
- $E_m$ : modulo elastico matrice (MPa)
- $G_f$ : modulo di taglio fibre (MPa)
- $G_m$ : modulo di taglio matrice (MPa)
- $\nu_f$ : modulo di Poisson fibre (adimensionale)

- $\nu_m$ : modulo di Poisson matrice (adimensionale)
- $\sigma_{RL}$ : resistenza longitudinale lamina unidirezionale base (MPa)
- $\sigma_{RT}$ : resistenza trasversale lamina unidirezionale base (MPa)
- $\tau_R$ : resistenza a taglio lamina unidirezionale base (MPa)
- $D$ : diametro tubo (mm)
- $K$ : rapporto di carico (dimensionale)
- $n$ : numero lamine
- % spessore : percentuale dello spessore totale di ogni singola lamina
- $p$ : pressione interna di esercizio (bar)

#### Calcolo

- Matrici  $Q$ ,  $\bar{Q}$ ,  $T$
- $E_x$ ,  $E_y$ ,  $G_{xy}$ ,  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{yx}$
- Spessore  $t$  del tubo mediante applicazione di un criterio di resistenza a scelta tra Tsai-Hill, Tsai-Wu, Hoffman ad ogni lamina
- Scelta del maggiore dei valori di  $t$  determinati precedentemente quale spessore di prima rottura
- Individuazione (nel caso di più lamine) della lamina, o delle lamine, che sopraggiungono a prima ultima
- Tensione assiale e circonferenziale di prima rottura
- Determinazione del minore dei valori di  $t$  calcolati precedentemente quale spessore di rottura della matrice in ogni lamina (questo valore, nel caso di una sola lamina, corrisponde ovviamente con lo spessore di prima rottura determinato sopra)
- Tensione assiale e circonferenziale di rottura della matrice in ogni lamina (uguali, ovviamente, ai valori di prima rottura nel caso di una sola lamina)

Considerando nulli i contributi da parte della matrice di ogni lamina si calcolano di nuovo:

- Matrici  $Q$ ,  $\bar{Q}$
- $E_x$ ,  $E_y$ ,  $G_{xy}$ ,  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{yx}$
- Spessore  $t$  del tubo mediante applicazione di un criterio di resistenza a scelta tra Tsai-Hill, Tsai-Wu, Hoffman ad ogni lamina
- Scelta del maggiore dei valori di  $t$  determinati precedentemente e, se è

minore di quello relativo a prima rottura, viene ritenuto come spessore di ultima rottura; in caso contrario, quest'ultimo, corrisponde a quello di prima rottura

- Individuazione (nel caso di più lamine) della lamina, o delle lamine, che sopraggiungono a rottura ultima
- Tensione assiale e circonferenziale di rottura ultima

### Verifica

*Valori di input:*

- $E_f$ : modulo elastico fibre (MPa)
- $E_m$ : modulo elastico matrice (MPa)
- $G_f$ : modulo di taglio fibre (MPa)
- $G_m$ : modulo di taglio matrice (MPa)
- $\nu_f$ : modulo di Poisson fibre (adimensionale)
- $\nu_m$ : modulo di Poisson matrice (adimensionale)
- $\sigma_{RL}$ : resistenza longitudinale lamina unidirezionale base (MPa)
- $\sigma_{RT}$ : resistenza trasversale lamina unidirezionale base (MPa)
- $\tau_R$ : resistenza a taglio lamina unidirezionale base (MPa)
- $D$ : diametro tubo (mm)
- $K$ : rapporto di carico (dimensionale)
- $n$ : numero lamine
- % spessore: percentuale dello spessore totale di ogni singola lamina
- $t$ : spessore tubo (mm)

*Calcolo:*

- Matrici  $Q$ ,  $\bar{Q}$ ,  $T$
- $E_x$ ,  $E_y$ ,  $G_{xy}$ ,  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{yx}$
- Pressione interna  $p$  del tubo mediante applicazione di un criterio di resistenza a scelta tra Tsai-Hill, Tsai-Wu, Hoffman ad ogni lamina
- Scelta del minore dei valori di  $p$  determinati precedentemente quale pressione di prima rottura
- Individuazione (nel caso di più lamine) della lamina, o delle lamine, che sopraggiungono a rottura ultima
- Tensione assiale e circonferenziale di prima rottura
- Determinazione del maggiore dei valori di  $p$  calcolati precedentemente

quale pressione di rottura della matrice in ogni lamina (questo valore, nel caso di una sola lamina, corrisponde con il valore della pressione di prima rottura determinato sopra)

- Tensione assiale e circonferenziale di rottura della matrice in ogni lamina (uguali ai valori di prima rottura nel caso di una sola lamina)

Considerando nulli i contributi da parte della matrice di ogni lamina si calcolano di nuovo:

- Matrici  $Q$ ,  $\bar{Q}$
- $E_x$ ,  $E_y$ ,  $G_{xy}$ ,  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{yx}$
- Pressione interna  $p$  del tubo mediante applicazione di un criterio di resistenza a scelta tra Tsai-Hill, Tsai-Wu, Hoffman ad ogni lamina
- Scelta del minore dei valori di  $p$  determinati precedentemente e, se è minore di quello relativo a prima rottura, viene ritenuto come pressione di ultima rottura; in caso contrario, quest'ultima, corrisponde a quella di prima rottura
- Individuazione (nel caso di più lamine) della lamina, o delle lamine, che sopraggiungono a rottura ultima
- Tensione assiale e circonferenziale di rottura ultima

## CAPITOLO 5

### MATERIALI, TECNICHE DI FABBRICAZIONE E DI CARATTERIZZAZIONE

#### 5.1 MACCHINA PROTOTIPALE PER FILAMENT WINDING

La realizzazione dei tubi in composito è avvenuta grazie l'innovativa macchina prototipale per Filament Winding ALAB0103 (Figura 5.1a) a cinque assi di moto indipendenti (Figura 5.1b) i quali consentono la:

- rotazione del mandrino;
- traslazione del gruppo vasca di impregnazione e testa portafilo in direzione parallela all'asse del mandrino;
- traslazione verticale della testa portafilo;
- traslazione orizzontale della testa portafilo in direzione ortogonale all'asse del mandrino;
- rotazione della testa portafilo.



Figura 5.1a – Macchina Filament Winding

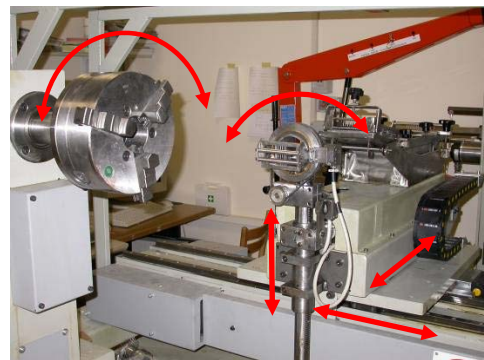


Figura 5.1b – Assi di movimentazione



La macchina può realizzare tubi con angoli di avvolgimento a partire da  $0^\circ$  (avvolgimento longitudinale) a valori molto vicini ai  $90^\circ$  (avvolgimento circonferenziale). Il valore di quest'angolo, definito come l'angolo  $\alpha$  tra l'asse del mandrino e la direzione delle fibre (figura 5.2), dipende dal rapporto tra la velocità tangenziale del mandrino  $VM$  e la velocità traslazionale della testa portafilo  $VT$ . Nell'ottica di funzionamento di una simile apparecchiatura, un avvolgimento polare può essere inteso come la degenerazione di un elicoidale per il quale si ha  $VM=0$  m/s e quindi  $\alpha=0^\circ$ . Viceversa, un avvolgimento circonferenziale è un elica realizzata con un movimento della testa porta filo estremamente lento, al limite con  $VT=0$  m/s e quindi  $\alpha=90^\circ$ .

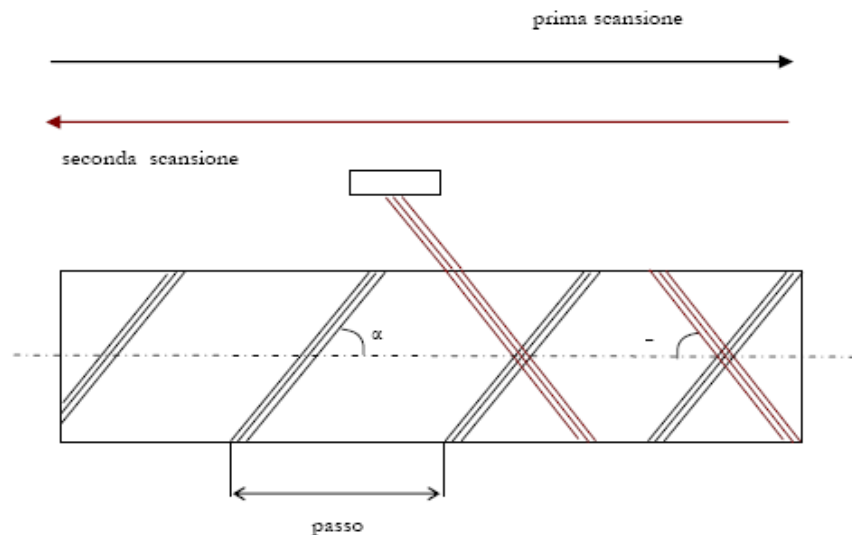


Figura 5.2 – Schema di deposizione delle fibre

Lo spostamento della testa da un'estremità all'altra del mandrino realizza la deposizione di quella che viene chiamata "elica"; se le due scansioni avvengono con lo stesso rapporto tra le velocità di rotazione del mandrino e quella della testa portafilo, le due eliche avranno angoli di avvolgimento opposti in segno ma uguali in modulo. Viene definito, inoltre, il *passo*  $P$  dell'elica come la distanza lungo la generatrice del mandrino tra due punti omologhi della stessa fibra durante una scansione. Con la deposizione successiva di un certo numero di eliche si ottiene la completa copertura del mandrino e si realizza il primo strato del laminato che avrà

fibre disposte con angolo di avvolgimento  $\alpha$  e  $-\alpha$ .

La macchina può funzionare in modalità di controllo manuale o automatico. In automatico, i movimenti degli assi sono gestiti da una scheda di controllo che si interfaccia con l'operatore attraverso un software installato su un normale PC. Tale software consta di un ambiente di programmazione, grazie al quale è possibile scrivere e memorizzare programmi di lavoro, e di un ambiente diagnostico che permette di monitorare in tempo reale le posizioni degli assi e le loro velocità.

I listati dei programmi consistono in una serie di comandi elementari che impongono spostamenti o velocità dei vari assi. I comandi che possono essere utilizzati sono :

- *Velocità*: specifica asse per asse con quali velocità saranno eseguiti i movimenti imposti dai comandi successivi, fino a che non viene inserito nel programma un altro comando analogo che impone nuove velocità.

- *Muovi*: specifica asse per asse gli spostamenti da eseguire a partire una posizione di zero-assi che la macchina raggiunge con un comando manuale; tutti gli spostamenti, tranne quello del mandrino vengono assegnati in maniera incrementale, e quindi assegnando semplicemente l'ascissa da raggiungere; per il mandrino bisogna invece assegnare lo spostamento, così, ad esempio, si deve scrivere il valore 0 per lasciarlo fermo, mentre per gli altri si deve riscrivere il valore dell'ultima ascissa raggiunta.

- *Stop*: arresta il programma in esecuzione che può essere fatto ripartire dalla riga successiva allo stop attraverso un comando manuale.

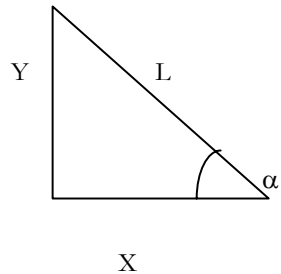
- *Ripeti*: la sequenza dei comandi compresa tra due *ripeti* viene ripetuta un numero di volte specificato dal valore del *counter* inserito nel comando.

- *Avvolg*: è l'unico comando composto e permette, assegnate le dimensioni del mandrino, di effettuare la legatura alle estremità del mandrino.

Le velocità vanno scelte nel campo di quelle realizzabili dai motori; le velocità  $VM$  e  $VT$ , nei movimenti coordinati e simultanei degli assi di traslazione della testa portafilo e di rotazione del mandrino, vengono interpolate, come è possibile vedere dall'ambiente diagnostico del software, pur mantenendo lo stesso rapporto. La riduzione delle velocità è di 1/10 rispetto alle velocità assolute assegnate.

## 5.2 RELAZIONI MATEMATICHE PER LA STESURA DEL PROGRAMMA DI AVVOLGIMENTO

Considerata una data lunghezza di filo deposta in un intervallo di tempo  $\Delta t$  con un generico angolo di avvolgimento  $\alpha$  si ha :



$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{V.1})$$

Dove  $X$  e  $Y$  sono rispettivamente lo spostamento traslazionale della testa portafilo e lo spostamento tangenziale del mandrino nel tempo  $\Delta t$ . L'angolo  $\alpha$  è definito come l'angolo tra l'asse del mandrino e la direzione delle fibre e, dipende dal rapporto tra le due velocità  $V_M$  e  $V_T$ . Ne discende, quindi, il seguente legame:

$$\frac{V_M}{V_T} = \frac{Y}{X} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{V_M}{V_T}$$

Particolarizzando la formula per un mandrino di raggio  $R$ , per il quale  $V_M = \omega R$ , con  $\omega$  velocità angolare :

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\omega R}{V_T}$$

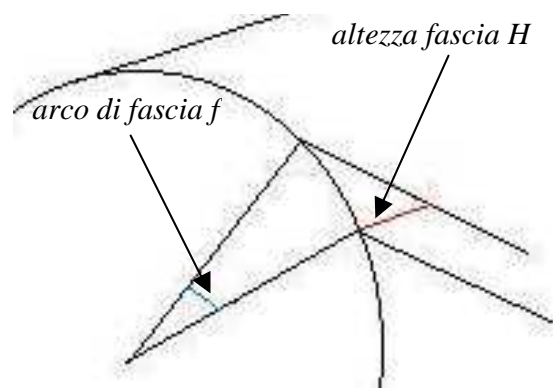


Figura 5.3

Facendo riferimento alla figura 5.3, vengono definite altre grandezze caratteristiche di un'elica:

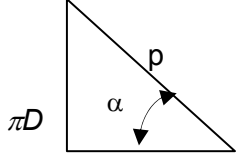
altezza fascia  $H$ : dimensione della fascia depositata (che può essere composta di più fili affiancati) misurata in direzione parallela all'asse del mandrino

arco di fascia  $f$  : angolo sotteso all'arco intercettato dalla fascia stessa sulla circonferenza all'estremità del mandrino.

Per i parametri definiti si può scrivere:

$$f = \frac{H}{p} \times 360^\circ \quad (V.5)$$

in cui  $p$  è il passo dell'elica, definito in base a considerazioni geometriche, dalla relazione:

$$p = \frac{\pi D}{\tan \alpha} \quad (V.6)$$


con  $D$  diametro del mandrino.

In particolare, per l'espressione di  $f$ , se  $A$  è l'arco rettificato intercettato dalla fascia sulla circonferenza esso è dato da:

$$A = H \cdot \tan \alpha$$

ed essendo in radianti:

$$f = \frac{A}{R}$$

si ottiene in gradi :

$$f = \frac{H \cdot \tan \alpha}{R} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi}$$

che tenendo conto dell'espressione (V.6) del passo, restituisce la (V.5).

Il numero di avvolgimenti,  $n_{avv} = L/p$ , è definito come il numero di giri necessari per un'elica. L'angolo di uscita :

$$\delta = [n_{avv} - \text{int}(n_{avv})] \times 360^\circ \quad (V.8)$$

è l'angolo in gradi all'estremità del tubo, corrispondente alla parte non intera di  $n_{avv}$ .

Dalle relazioni esposte è possibile calcolare le grandezze geometriche che

caratterizzano una data elica con un assegnato angolo di avvolgimento, una volta note le dimensioni del mandrino e della fascia di fibre deposta.

Si pone però il problema di ottenere un progressivo ricoprimento della superficie del mandrino senza spazi vuoti. Per far ciò è necessario un opportuno sfasamento di due eliche successive con angolo dello stesso segno, che permetta di affiancare le fasce delle due eliche e cioè di disporre ogni elica esattamente accanto alla precedente. Questa condizione si realizza se la somma delle rotazioni che il mandrino ha effettuato durante le due scansioni della testa ( $\alpha$  e  $-\alpha$ ) è pari ad un numero intero di giri più l'arco della fascia. Poiché in due scansioni il mandrino eccede un numero intero di giri di due volte l'angolo di uscita e deve effettuare due legature, indicato con  $\beta$  l'angolo di legatura (angolo corrispondente alla rotazione con cui il mandrino lega, supposta uguale ai due estremi), la condizione precedente si traduce in:

$$2\delta + 2\beta = 360^\circ + f$$

da cui:

$$\delta = 180^\circ - \beta + f / 2 \quad (V.10)$$

che rappresenta la condizione per l'affiancamento delle fasce. Tale relazione ha ugual significato fisico, ragionando con  $180^\circ$  o con  $360^\circ$ , infatti i valori ottimizzati sono identici, ma con  $360^\circ$  si arriva prima a convergenza.

Supponendo ora di voler legare alle estremità con un angolo  $\beta=180^\circ$ , in corrispondenza di un certo valore di  $f$  calcolato dalle equazioni (V.5) e (V.6) a partire dal valore dell'angolo  $\alpha$ , si avrà, dall'equazione (V.10), un valore dell'angolo di uscita che realizza l'affiancamento. Tale valore di  $\delta$  sarà però in generale diverso da quello calcolato attraverso la (V.8), in quanto dipende da  $f$ , che è un valore assegnato, in quanto calcolato in base alla relazione (V.5) che, quindi, dipende dal rapporto di  $H$  su  $p$ .

Si procede, allora in maniera iterativa, rifacendo a ritroso il calcolo per trovare i valori di  $\alpha$  e  $f$  corrispondenti al nuovo valore di  $\delta$  ed utilizzando questi valori nuovamente come valori di partenza nella condizione di affiancamento.

Ripetendo a ritroso i calcoli si ha:

Angolo di legatura (°):  $\beta = 180^\circ$

Angolo di uscita (°):  $\delta = (360^\circ - \beta) - f_{arco} / 2$

Giri di avvolgimento (giri):  $n_{avv} = \text{int}(n_{avv}) + \delta / 360$

Passo (mm):  $p = \frac{L}{n_{avv}}$

Angolo avvolgimento:  $\alpha = \arctan \left[ \frac{\pi \times D}{p} \right]$

Tale procedura fornisce ad ogni iterazione valori sempre più vicini a quelli da cui si è partiti e quindi converge verso i parametri che realizzano l'angolo di avvolgimento che si è impostato. Il calcolo va ripetuto fino a quando una iterazione non restituisce gli stessi valori della precedente. Nella tabella 5.1 che segue, viene riportato un esempio della procedura di calcolo appena descritta eseguendo le iterazioni in maniera automatica, in modo molto semplice, su un foglio *Excel*. In questo esempio si parte da un angolo di avvolgimento di  $55^\circ$  e si utilizza un angolo di legatura di  $75^\circ$ . La scelta di quest'ultimo è dettata sia da considerazioni di carattere pratico, ossia, angoli troppo piccoli sono difficili da gestire, mentre angoli troppo grandi comportano un accumulo troppo elevato di materiale alle estremità del pezzo (materiale che va rimosso ed è di scarto), inoltre, il suo valore influenza la velocità e la qualità con cui converge il calcolo, determinando il numero di iterazioni necessarie e l'approssimazione con cui ci si avvicina all'angolo di avvolgimento impostato.

Tabella 5.1

	Valori di partenza	Unità misura	1 <sup>a</sup> iterazione	2 <sup>a</sup> iterazione	3 <sup>a</sup> iterazione	4 <sup>a</sup> iterazione
<b>L</b>	Lunghezza	mm	<b>2115.00</b>	2115.00	2115.00	2115.00
<b>D</b>	Diametro	mm	<b>200.00</b>	200.00	200.00	200.00
<b>α</b>	Angolo avvolgimento	gradi	<b>55.00</b>	51.97	54.97	54.98
<b>H</b>	Altezza fascia	mm	<b>10.00</b>	10.00	10.00	10.00
	<b>Primo calcolo</b>					
<b>P</b>	Passo	mm	439.95	491.51	440.46	440.35
<b>n_avv</b>	Giri avvolgimento		4.81	4.30	4.80	4.80
<b>f_arco</b>	Arco della fascia	gradi	8.18	7.32	8.17	8.18
<b>δ</b>	Angolo di uscita	gradi	290.64	109.09	288.66	289.09
	Copertura		44.00	49.15	44.05	44.03
	<b>Ottimizzazione</b>					
<b>β</b>	Angolo legatura	gradi	<b>75.00</b>	75.00	75.00	75.00
<b>δ</b>	Angolo di uscita	gradi	109.09	288.66	289.09	289.09
<b>n_avv</b>	Giri avvolgimento		4.30	4.80	4.80	4.80
<b>P</b>	Passo	mm	491.51	440.46	440.35	440.35
<b>α</b>	Angolo avvolgimento	gradi	51.97	54.97	54.98	54.98

In questa tabella viene riportato anche il numero di eliche (copertura), necessario a ricoprire il mandrino, calcolato semplicemente come il rapporto tra il passo e l'altezza della fascia. Volendosi liberare dal vincolo dei  $180^\circ$ , si può legare ad un angolo  $\beta$  generico e i  $(\beta - 180^\circ)$  li si deve decurtare allo sfasamento che viene dato in avvolgimento e che diventerà di:

$$\left[180^\circ - (\beta - 180^\circ)\right] - \frac{f_{\text{arco}}}{2}$$

## 5.3 MATERIALI E PROCEDURE SPERIMENTALI

### 5.3.1 SISTEMA MATRICE

Il metodo di fabbricazione, il livello di performance e il costo delle strutture a simmetria cilindrica sono controllati dalla matrice o resina componente.

Il sistema resina in un composito ottenuto per avvolgimento di fibre ha le stesse funzioni che ha nelle strutture composite fabbricate con altri metodi ossia assicurare la forma al manufatto, trasmettere il carico alle fibre, proteggere le fibre dall'abrasione (durante l'avvolgimento e la compattazione), controllare le proprietà

elettriche e chimiche, stabilire gli sforzi di taglio interlaminare.

Tra le proprietà più importanti della matrice ricordiamo la capacità di adesione alla fibra e, la dove richiesto, resistenza termica, resistenza alla fatica, resistenza chimica, resistenza all'umidità.

La resina utilizzata per la fabbricazione dei tubi fa parte della famiglia dei termoindurenti; esse, in genere, attivano la reazione di indurimento quando viene fornita una certa quantità di energia, ad esempio sotto forma di calore, oppure mediante l'impiego di opportuni catalizzatori.

La reazione dà luogo ad un legame chimico tridimensionale e, a seguito di ciò, il materiale curato non si fonde, ma all'aumentare della temperatura rammollisce, in quanto le catene molecolari si allontanano tra loro.

Se si aumenta troppo la temperatura, pur non raggiungendo lo stato liquido, si corre il rischio di degradare irreversibilmente le macromolecole con perdita di tutte le caratteristiche meccaniche, ed il composito non è in grado di sopportare più i carichi designati.

Ciò è chiamato 'transizione vetrosa' o 'temperatura di distorsione termica' (*gel time*), ed è funzione del tipo di resina usata e della temperatura di cura.

La reticolazione è, quindi, una reazione chimica che altera la struttura della resina, ma è proprio grazie a questa reazione chimica che le resine termoindurenti presentano modulo più elevato e, soprattutto, sono più indipendenti dalla temperatura.

Ne discende che i fattori importanti che bisogna considerare nel processo sono: il *pot life*, il *gel time* e il tempo di cura.

La resina può essere applicata alle fibre in diversi modi, nel caso in esame sono state immerse in un bagno di resina liquida durante il processo di avvolgimento. Essa, inoltre, ha presentato una bassa viscosità per poter fluire facilmente tra le fibre ed impregnarle, l'applicazione di tensione alle fibre ha inoltre aiutato a compattare l'avvolgimento e a ridurre il numero di vuoti.

La resina utilizzata per il processo è una poliestere insatura prodotta dalla DSC Composite Resins il cui nome commerciale è Synolite 0226-N-4.

Le resine poliesteri sono basate sulla reazione di un'anidride acida insatura, che nel caso specifico è un'anidride isoftalica, con altre anidridi con polioli.

In genere una resina di tipo isoftalico, a parità degli altri parametri, ha proprietà meccaniche di circa il 10-20% superiori ad una resina ortoftalica. In particolare con



le resine isoftaliche si ha una migliore resistenza a trazione, un miglior allungamento a rottura, una più elevata transizione vetrosa e una superiore resistenza chimica. Le resine bisfenoliche, generalmente, garantiscono un ulteriore incremento delle proprietà sopraelencate, ma, sia per ragioni di costo, sia per il colore, sono meno utilizzate.

Tabella 5.2 – Proprietà resina liquida

Formulazione: Resina 100 p.p.; Co Ottoato 6% 0,2 p.p.; MEKP(Metil Ethyl Ketone Peroxide) 1,5 p.p

PROPRIETA'	UNITA' MISURA	ORTOFTALICA	ISOFTALICA	BISFENOLICA	METODO DI PROVA
Colore	Hazen	60	100	> 100	ASTM-D 1209
Densità a 20°C	g/cm <sup>3</sup>	1,18	1,04	1,05	ASTM-D 0891
N. di acido	mgKOH/g resina	25	15	5	ASTM-D 1639
Viscosità a 25°C	mPa.s	400	500	500	ASTM-D 1824
Residuo secco	%	65	60	52	ASTM-D 2471
Tempo di gelo a 25 °C	minuti	10-15	10-15	10-15	ASTM-D 2471
Gelo SPI	minuti	8-10	8-10	-	S.P.I.
Gelo picco	°C	160-180	180-200	-	S.P.I.
Gelo tem max	minuti	12-14	12-14	-	S.P.I.
Stabilità a 65°C	giorni	6	6	6	SRI 10242

Tabella 5.3 – Proprietà resina indurita

Formulazione: Resina 100 p.p.; Co Ottoato 6% 0,2 p.p.; MEKP 1,5 p.p.  
Ciclo di cura: 24 ore a temperatura ambiente, 2 ore a 100 °C

PROPRIETA'	UNITA' MISURA	ORTOFTALICA	ISOFTALICA	BISFENOLICA	METODO DI PROVA
Resistenza a flessione	MPa	90	110	120	ASTM-D 0790
Modulo a flessione	MPa	3800	4000	4000	ASTM-D 0790
Resistenza a trazione	MPa	55	65	65	ASTM-D 0638
Modulo a trazione	MPa	3500	3600	3600	ASTM-D 0638
Allungamento a rottura	%	2,0	2,5	3,0	ASTM-D 0638
Resistenza all'urto (con intaglio)	KJ/ m <sup>2</sup>	1,5	2,0	2,0	ASTM-D 0251
Durezza Barcol	-	40	45	45	ASTM-D 2583
Durezza Shore D	-	75	80	80	DIN 53505
Temperatura transizione vetrosa	°C	90	110	130	DIN 53445
Ritiro volumetrico	%	8	8	8	Picnometro
Assorbimento acqua	%	0,2	0,18	0,15	ISO R26

Le prove eseguite su resina pura hanno portato ai seguenti risultati:

- la resina pura polimerizza a temperatura ambiente in più di 24 ore
- la resina pura polimerizza ad una temperatura di 150°C, in 6 ore

Le prove effettuate con accelerante e catalizzatore, con percentuali rispettivamente di 0.25% in peso di sali di cobalto e 1.25% in volume, hanno portato al seguente risultato:

- la resina polimerizza a temperatura ambiente in circa 1 ora.

### 5.3.2 SISTEMA RINFORZO

La maggior quantità di fibre utilizzate per il processo di *Filament Winding* sono fibre di vetro le cui caratteristiche salienti sono riportate in tabella 5.4.

Tabella 5.4

Tipo	Caratteristiche	Moduli di trazione nominali [GPa]	Resistenza a trazione Nominale [Mpa]	Massimo numero di filamenti per strands	Densità delle fibre [g/cm <sup>3</sup> ]
<b>E</b>	Buone proprietà di isolamento elettrico, resistenza meccanica e modulo di Young	72.4	3447	4000	2.60
<b>R</b>	Buona resistenza alla corrosione chimica	86.2	2086	60	2.49
<b>S</b>	Maggior contenuto di ossido di silicio e migliori caratteristiche	86.2	1585		2.55

Le fibre di tipo *E* sono a base di borosilicato di alluminio e calcio; mentre, sia quelle di tipo *R* che quelle di tipo *S*, sono a base di silicato di alluminio e di magnesio.

Nel processo di *Filament Winding* sono impiegate fibre continue (*roving*) le quali si trovano in commercio a diverso numero di tex (gr/km).

Nella tabella che segue sono riportate alcune caratteristiche tecniche della fibra di vetro utilizzata.

Tabella 5.5

Linear weight (tex)	Filament diameter (μm)	Loss on ignition (%)	Moisture (%)
ISO 1889		ISO 1887	ISO 3344
600	17	0.50	≤ 0.20

### 5.3.3 TECNICHE DI CARATTERIZZAZIONE

Sono stati fabbricati tubi a geometria assialsimmetrica con angoli di avvolgimento delle fibre  $\pm 9$  (da  $10^\circ$  a  $90^\circ$ ) e  $9_1 9_2$  ( $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ ). Le estremità del mandrino sono state dotate di ghiera a denti in acciaio, come mostrato nel particolare in figura 5.4, alle quali agganciare i fili in fase di avvolgimento.



Figura 5.4

Nella due figure che seguono si evidenziano la fase di avvolgimento su mandrino cilindrico (figura 5.5a) e un particolare della testa portafilo (figura 5.5b).



Figura 5.5a – Avvolgimento  $55^\circ$



Figura 5.5b – Testa portafilo

Al fine di facilitare la sformatura, il mandrino è stato coperto da pellicola distaccante Mylar. Nella figura successiva si evidenzia come appare il provino una volta sformato.



Figura 5.6

I tubi sono stati dotati di *liner* interno impermeabilizzante onde evitare trafilamenti di fluido attraverso le pareti durante le prove di scoppio, e di *tab* metallici, al fine di consentire la chiusura del tubo simulando il comportamento di recipienti con fondi.



Figura 5.7 – Apparato per prove di scoppio

Per testare la resistenza dei tubi realizzati, sono stati immersi di una vasca di scoppio termostata della Hammel Sciteq P400 (figura 5.8a), la quale, sotto pressione idrostatica, ha sollecitato il manufatto sia assialmente che

circonferenzialmente. Grazie a due stazioni di pompaggio (figura 5.8b), gestibili manualmente o mediante PC, è stato possibile effettuare il riempimento del tubo ed inviare successivamente pressione fino ad un massimo di 500 bar.



Figura 5.8a – Vasca termostata



Figura 5.8b – Stazioni di pompaggio

Nella figura successiva viene mostrato il diagramma storico di una prova di scoppio con il picco di pressione.



Figura 5.9 - Diagramma storico

Una volta portati a rottura, essendo nota la pressione di scoppio, si è proceduto al calcolo delle relative tensioni circonferenziali ed assiali attraverso le relazioni valide per recipienti in pressione (vedi capitolo 4). Gli spessori sono stati invece determinati attraverso un *procedimento di normalizzazione* considerando lo spessore misurato del tubo (con angolo di avvolgimento  $\pm 55^\circ$ ) e dei metri di fibra necessari per realizzarlo. Dalla conoscenza di questi e del numero di *tex* relativo alle fibre impiegate (cioè peso in grammi per km di fibra), si è dedotto il peso della quantità della fibra utilizzata e quindi della matrice.

La percentuale in volume di fibra riscontrata è del 45%.

Per buona parte dei test eseguiti sui tubi con angoli di avvolgimento prossimi ai  $\pm 55^\circ$ , è stata riscontrata una rottura strutturale riguardante le fibre, come viene mostrato in figura 5.11a, in cui è evidente il danno alle fibre per un tubo  $\pm 55^\circ$ . Per un discreto numero di tubi con angoli di avvolgimento compresi tra  $0^\circ$  e  $\pm 40^\circ$  e tra  $\pm 60^\circ$  e  $\pm 90^\circ$  il cedimento di tipo funzionale rappresenta la rottura catastrofica del tubo (nonostante i tubi fossero provvisti di liner interno) e ha riguardato la matrice, come il danno relativo ad un tubo  $\pm 20^\circ$  e  $\pm 30^\circ$  evidenziato in figura 5.10a e 5.10b.



Figura 5.9a - Prima rottura per tubo con angolo di avvolgimento  $\pm 20^\circ$



Figura 5.9b - Prima rottura per tubo con angolo di avvolgimento  $\pm 30^\circ$



Figura 5.10a – Rottura ultima per tubo con angolo di avvolgimento  $\pm 55^\circ$



Figura 5.10b - Rottura ultima per tubo con angolo di avvolgimento  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$

Per i tubi con doppia orientazione  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$  le prove hanno determinato nella maggior parte dei casi la rottura strutturale relativa alle fibre. Un esempio di questa è fornito dalla figura 5.10b.

## CAPITOLO 6

### RISULTATI E DISCUSSIONI

In questo capitolo verranno confrontati in primo luogo i risultati sperimentali, ottenuti dalle prove di scoppio su tubi realizzati in laboratorio, con quelli teorici, ottenuti come risposta dal codice di calcolo numerico; successivamente, per convalidare ulteriormente il metodo analitico, verranno presi in considerazione risultati sperimentali di letteratura forniti da diversi autori su provini realizzati con compositi vari e sottoposti a stati tensionali biassiali variabili.

#### 6.1 CORRELAZIONE NUMERICO SPERIMENTALE

Come precedentemente illustrato, sono state eseguite prove di scoppio su tubi aventi angoli di avvolgimento delle fibre:  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $55^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ .

Nelle due diagrammi successivi vengono presentati gli andamenti delle tensioni assiali, di prima rottura e di rottura ultima, ottenuti dai confronti tra i risultati teorici e sperimentali su tubi con angolo di avvolgimento delle fibre a  $55^\circ$ .



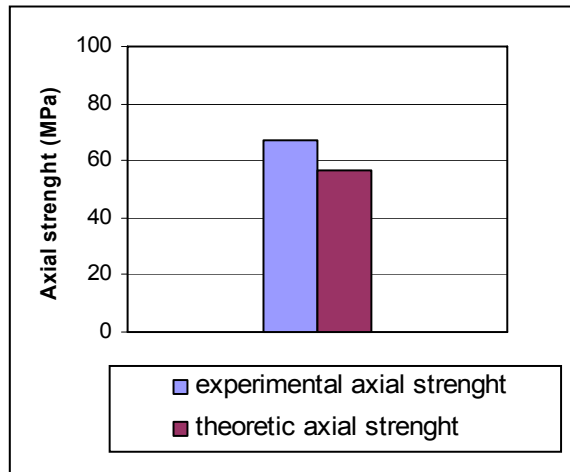


Figura 6.1 - Confronti a prima rottura per tubi con angoli di avvolgimento 55°

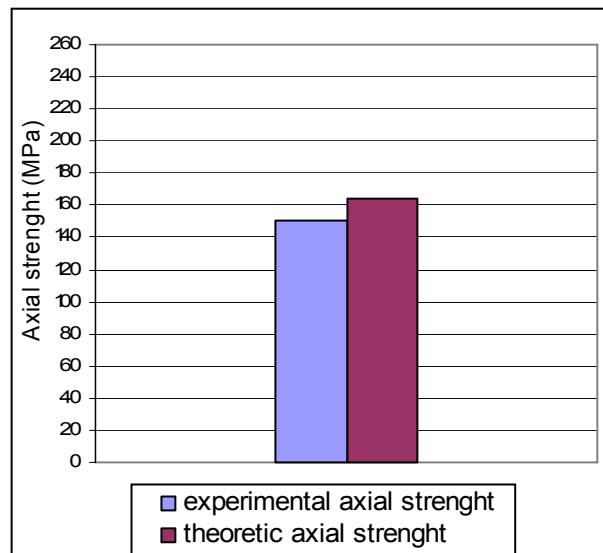


Figura 6.2 - Confronti a rottura ultima per tubi con angoli di avvolgimento 55°

Si nota come gli andamenti teorici siano in accordo con quelli sperimentali, in particolare il metodo teorico tende a sottostimare la prima rottura mentre sovrastima la rottura ultima.

Nelle due tabelle successive vengono riportati i valori di tensione assiale e circonferenziale sperimentali e quelli riscontrati dal modello teorico, utilizzando i criteri di Tsai-Hill, Tsai- Wu e Hoffman, per tubi con diverso angolo di avvolgimento. Inoltre, in figura 6.3, si riportano gli andamenti delle pressioni ultime riscontrate dalla correlazione.

Tabella 6.1

Tensione assiale				
Avvolgimento [°]	Calcolata TH [Mpa]	Calcolata TW [Mpa]	Calcolata H [Mpa]	Sperimentale [Mpa]
20	22,43	22,19	20,15	11,80
30	28,52	27,78	27,78	27,57
40	49,70	51,09	51,10	52,94
45	74,28	76,01	76,00	80,00
55	200,49	199,56	199,56	185,59
60	120,82	116,64	116,64	115,35
75	47,25	48,96	45,81	49,90
90	39,83	42,82	40,51	36,50

Tabella 6.2

Tensione circonferenziale				
Avvolgimento [°]	Calcolata TH [Mpa]	Calcolata TW [Mpa]	Calcolata H [Mpa]	Sperimentale [Mpa]
20	44,86	44,38	40,30	23,60
30	57,03	55,56	55,56	55,14
40	99,40	102,18	102,20	105,88
45	148,56	152,02	152,00	160,00
55	400,97	399,12	399,12	371,18
60	241,63	233,28	233,28	230,70
75	94,50	97,92	91,62	99,80
90	79,65	85,64	81,02	73,00

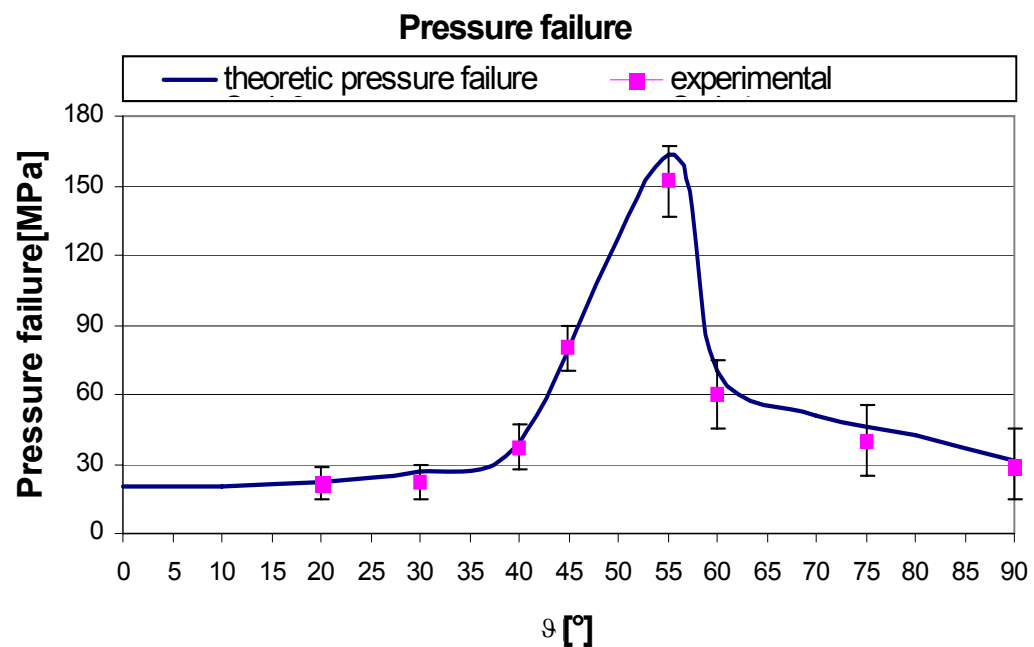


Figura 6.3 – Correlazione numerico sperimentale

Sono stati realizzati anche tubi con angoli di avvolgimento  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ , di particolare interesse per la loro resistenza e la loro maggiore rigidità rispetto ai  $\pm 55^\circ$  come viene mostrato dalla figura 6.3.

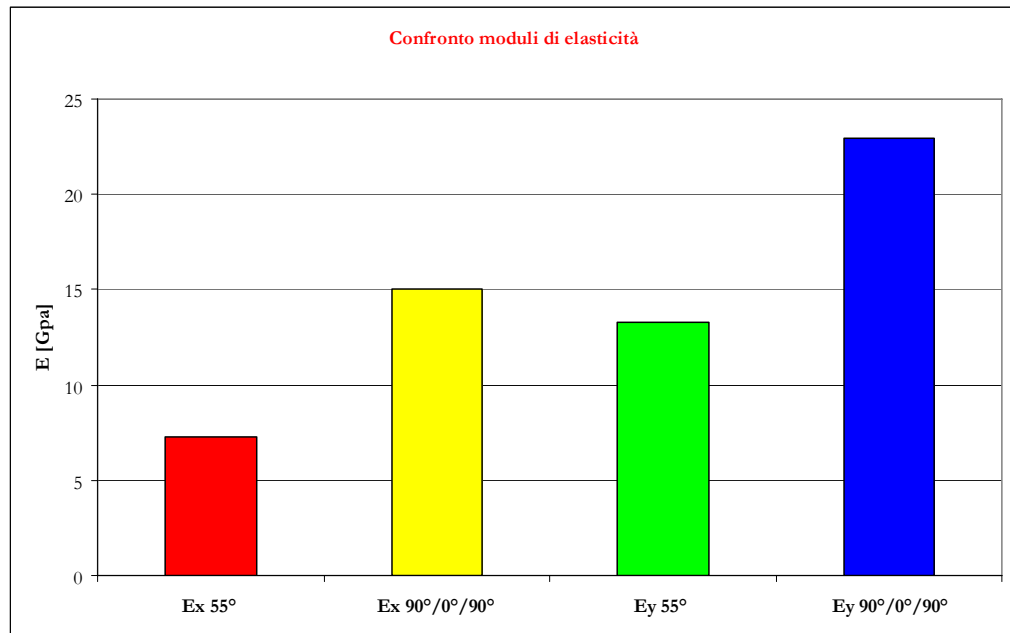


Figura 6.3

Nella figura 6.4 vengono confrontate le tensioni calcolate e sperimentali relative ad un tubo  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$  valutate mediante i criteri di resistenza considerati. Si nota una uguale rispondenza tra i tre criteri e un buon accordo tra gli andamenti teorico sperimentali.

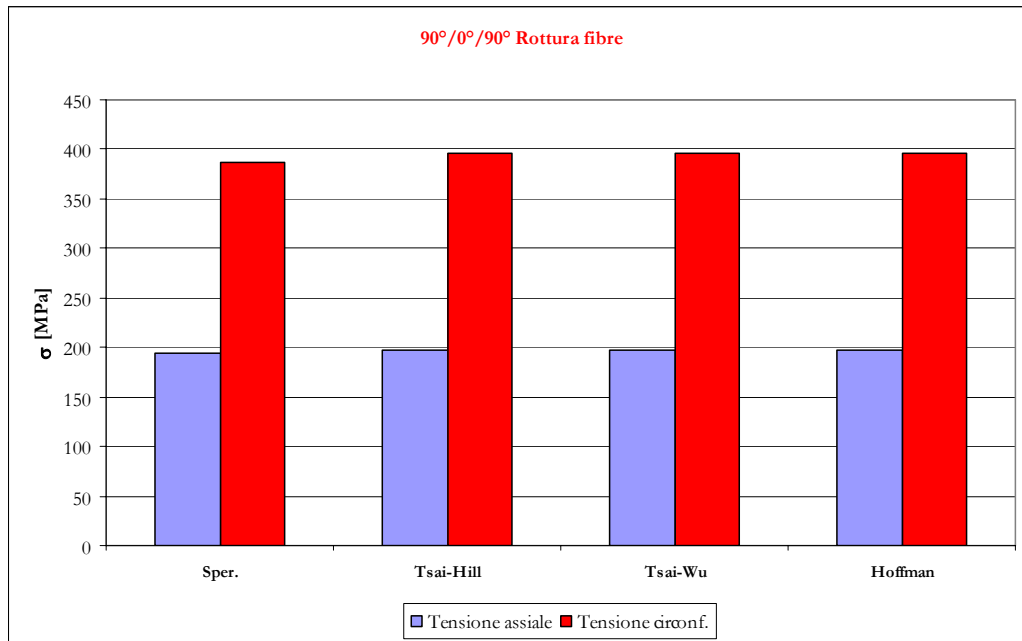


Figura 6.4

## 6.2 VALIDAZIONE MODELLO TEORICO

In questo paragrafo vengono confrontati i dati calcolati con quelli di prove sperimentali reperiti in letteratura riguardanti diversi provini realizzati con compositi vari e sottoposti ad uno stato tensionale biassiale diverso da quello considerato in vasca di scoppio (rapporto di carico  $K$  variabile).

Sono state prese in considerazione le fonti che fornivano i valori delle proprietà meccaniche dei materiali in oggetto necessari ai fini della determinazione dei valori calcolati.

Di seguito vengono mostrati alcuni confronti tra le tensioni di rottura calcolate, mediante i criteri di resistenza presi in esame, e quelle sperimentali per casi particolari di rapporto di carico e tipologia di rottura.

Per i casi relativi a rapporto di carico  $K=0,5$ , si può dedurre una sostanziale congruenza dei valori calcolati con quelli sperimentali, come evidenziato dalle figure successive. [13], [14], [15].

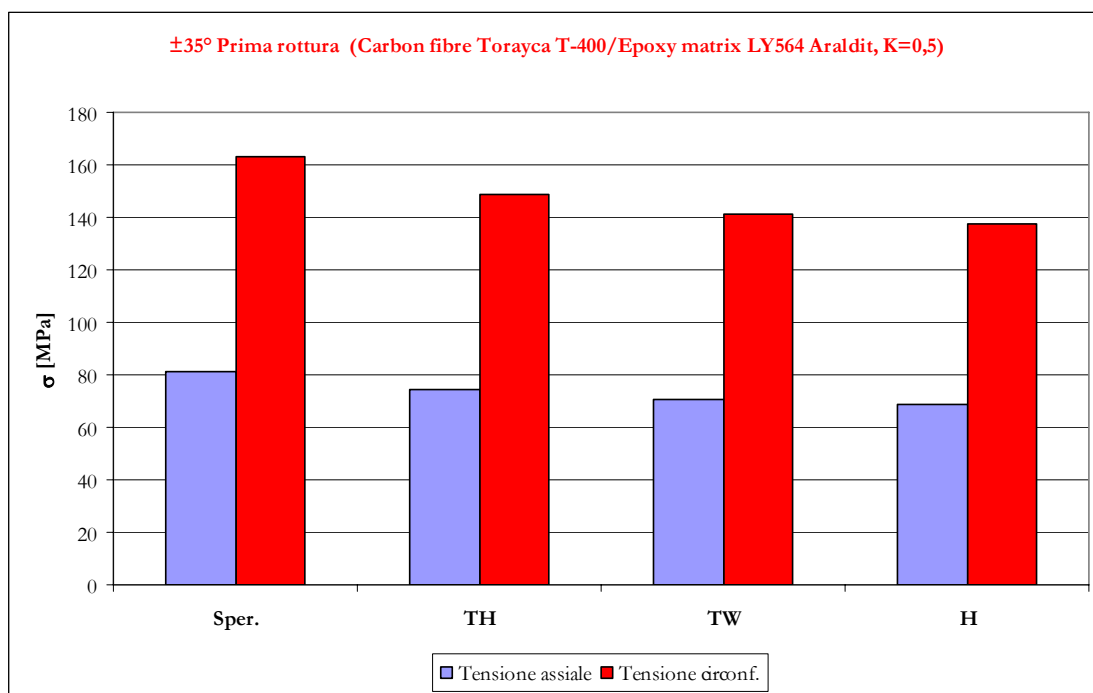


Figura 6.5

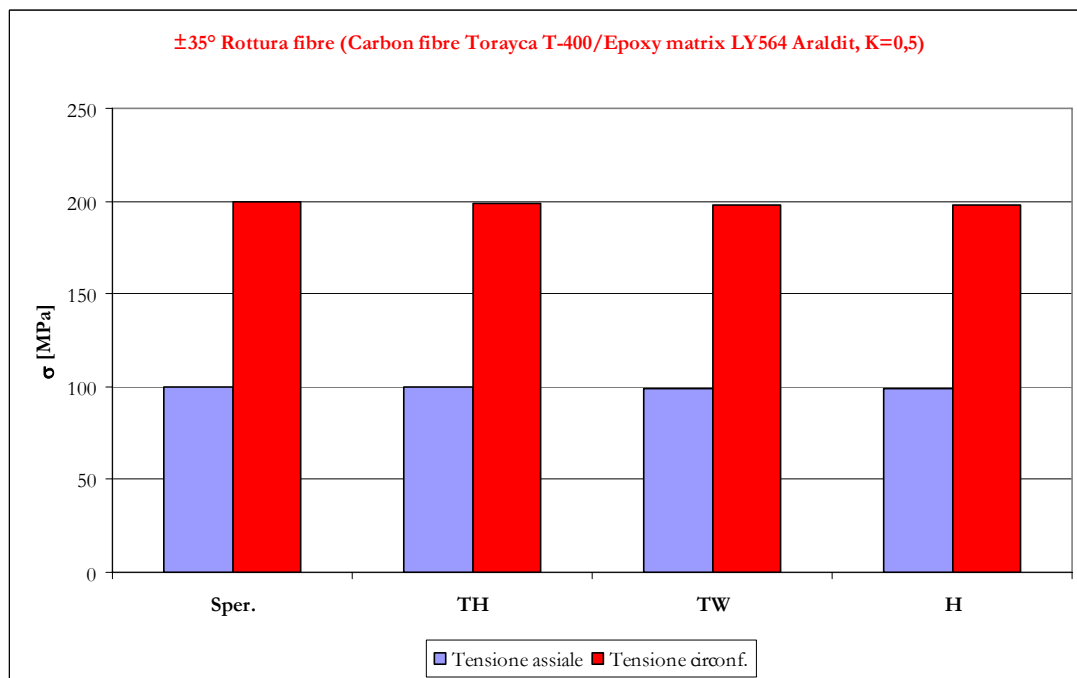


Figura 6.7

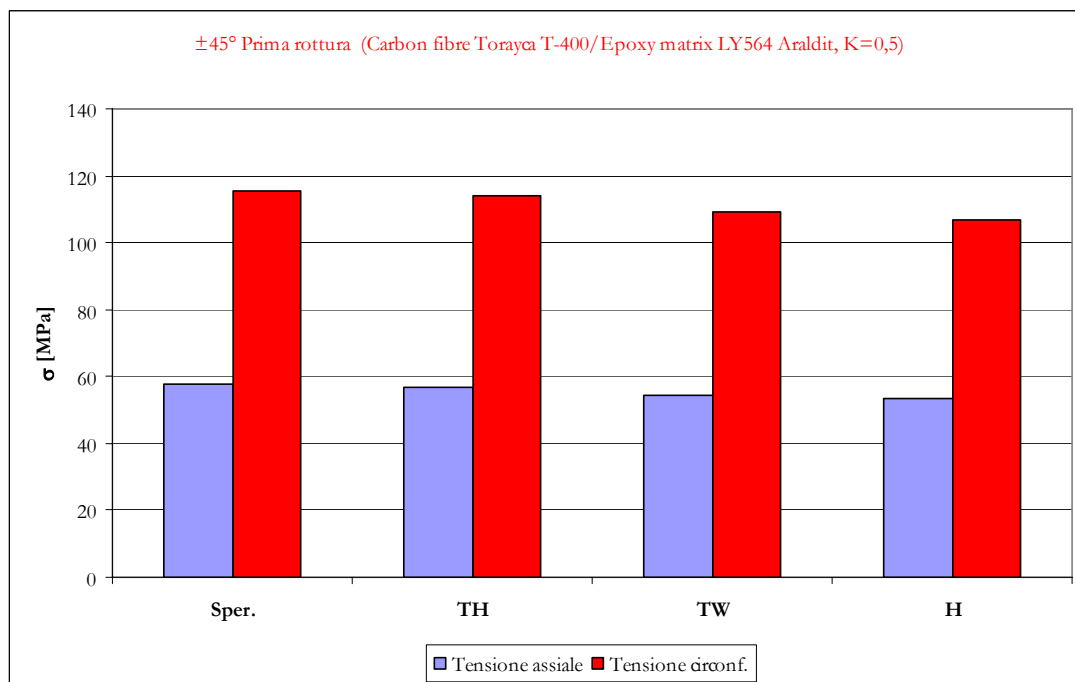


Figura 6.8



Figura 6.9

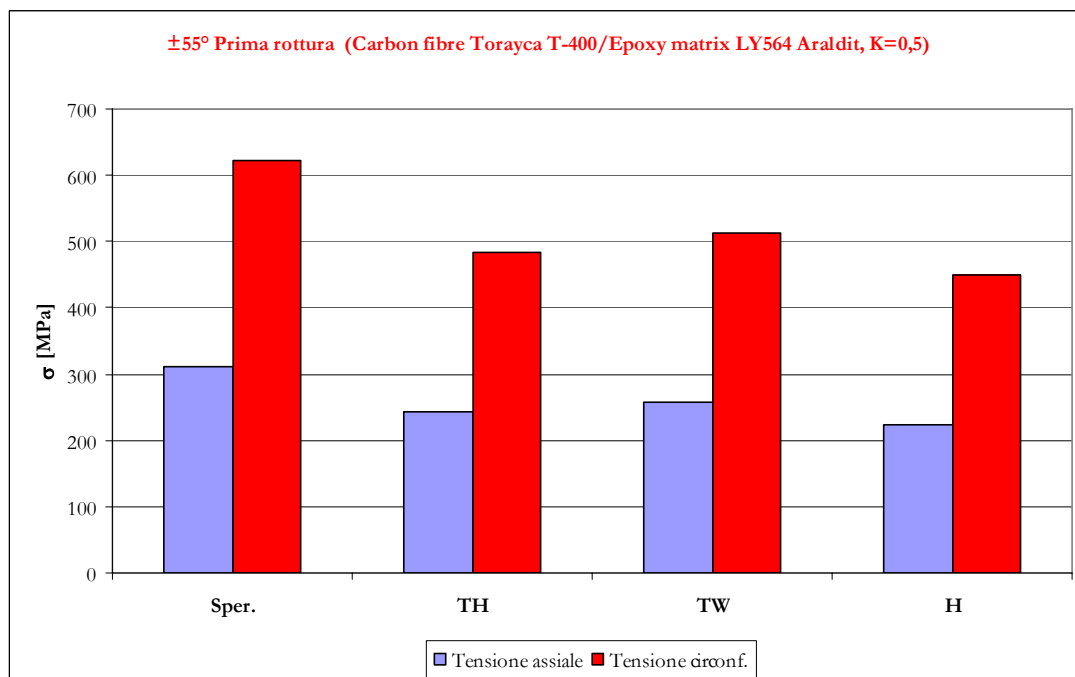


Figura 6.10

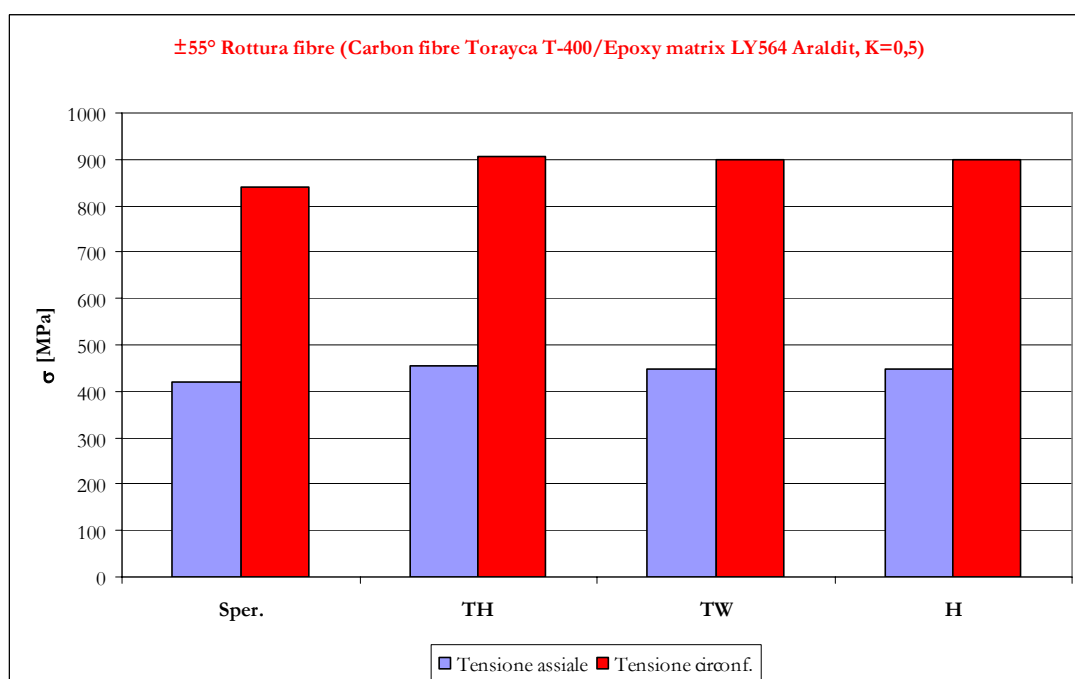


Figura 6.11

Nel caso di tubi con avvolgimento  $\pm 75^\circ$  occorre precisare che i dati sperimentali di prima e ultima rottura sono confrontati con gli stessi valori calcolati. Questo è dovuto al fatto che il codice di calcolo, relativamente a questo caso, non rileva (in termini di tensioni di rottura) miglioramenti nel considerare la rottura strutturale rispetto a quella funzionale della matrice.

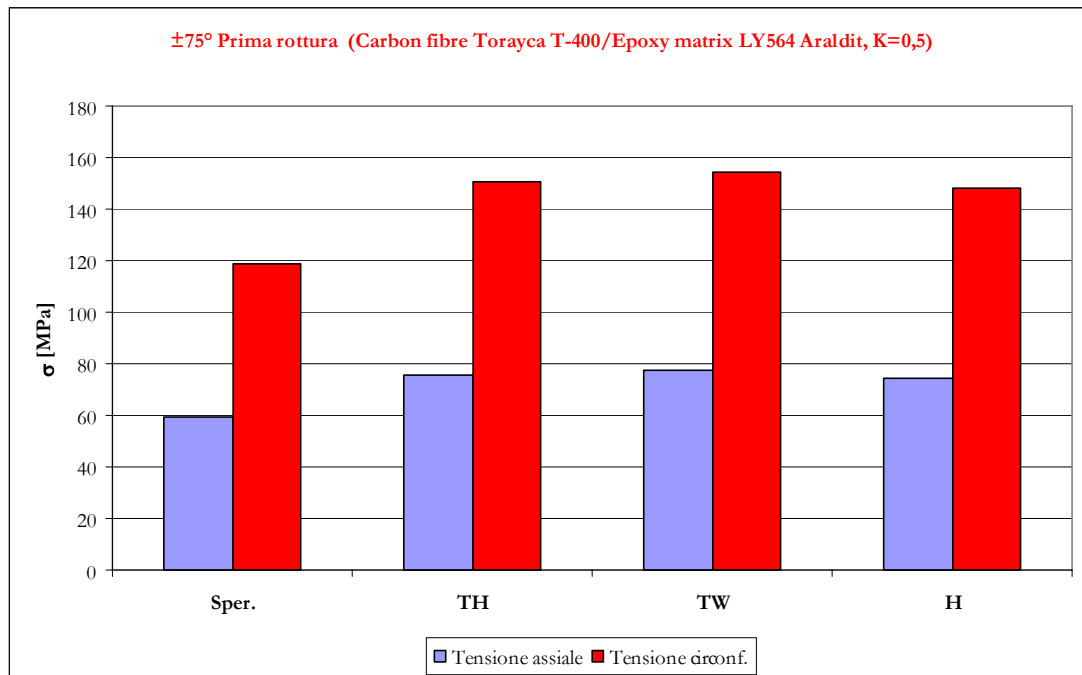


Figura 6.12



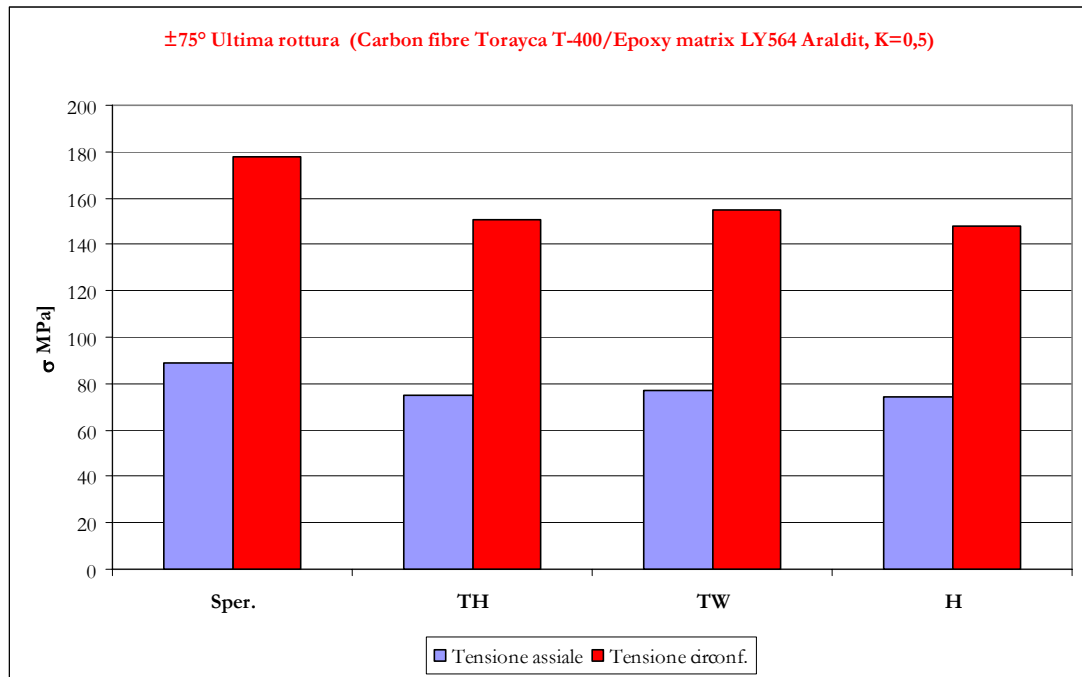


Figura 6.13

Le figure 6.14 e 6.15 si riferiscono al caso di un tubo con doppio angolo di avvolgimento, precisamente  $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$ . Si fa riferimento alla prima rottura, riguardante la matrice, e alla rottura della matrice in ogni lamina. Si può dedurre dal confronto una marcata tendenza alla sicurezza, indistintamente per i tre criteri esaminati, in entrambi i tipi di rottura.

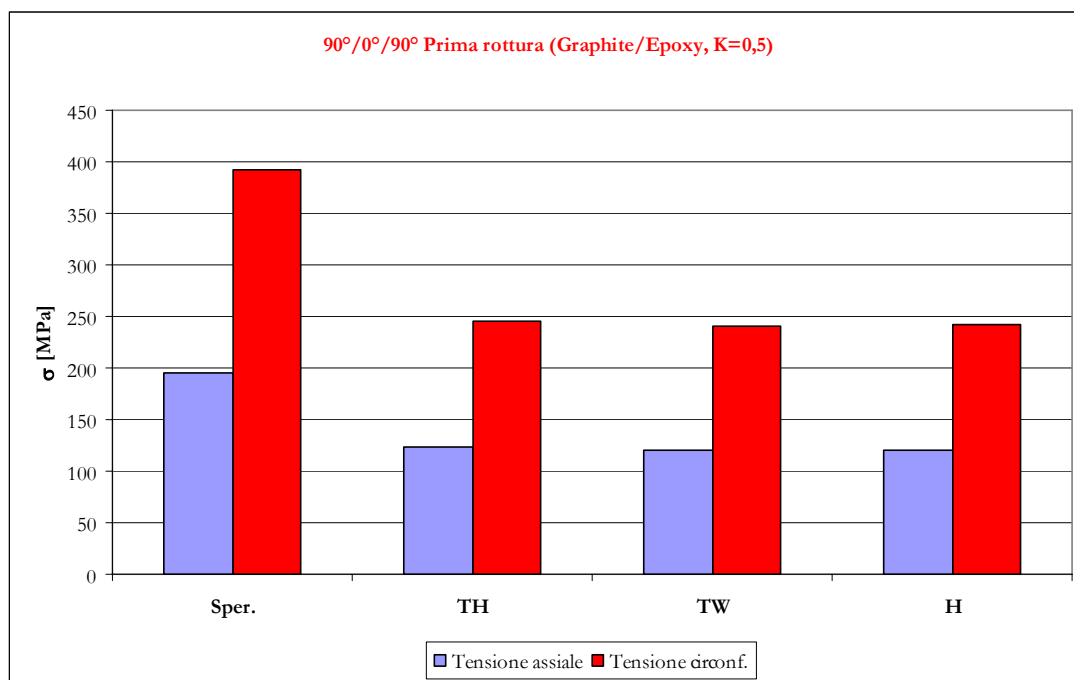


Figura 6.14

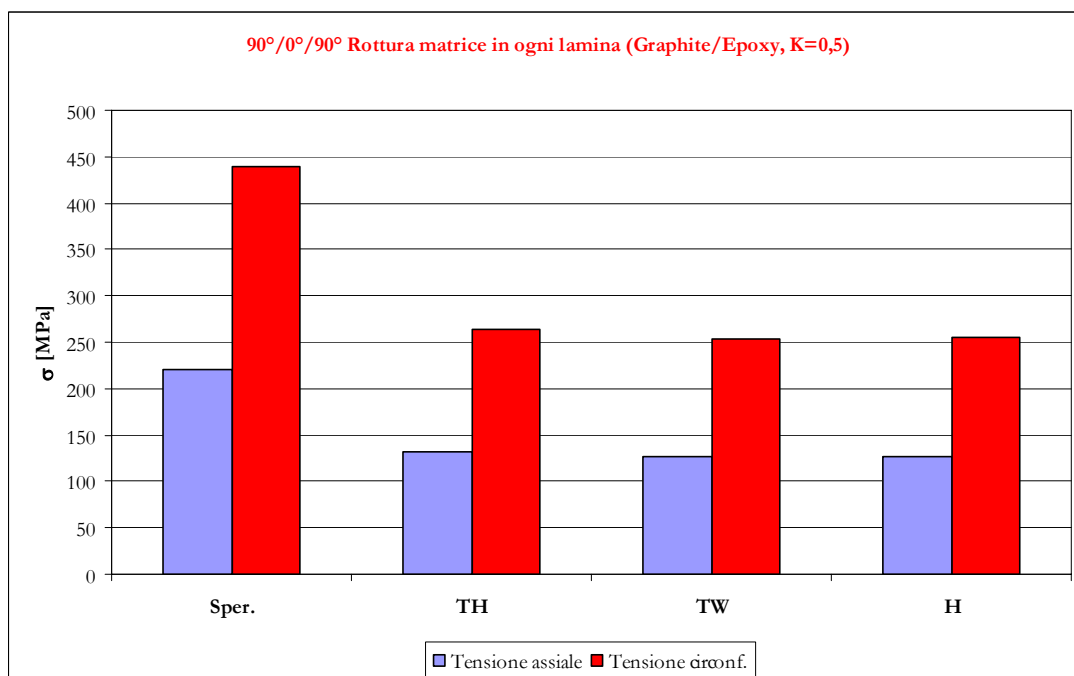


Figura 6.15

Nelle due prossime figure si comparano i dati relativi ad un rapporto di carico  $K=0$  (caso di un tubo senza fondi) e  $K=1$ . Si può notare, anche in queste condizioni, il discreto accordo tra valori calcolati e reali.

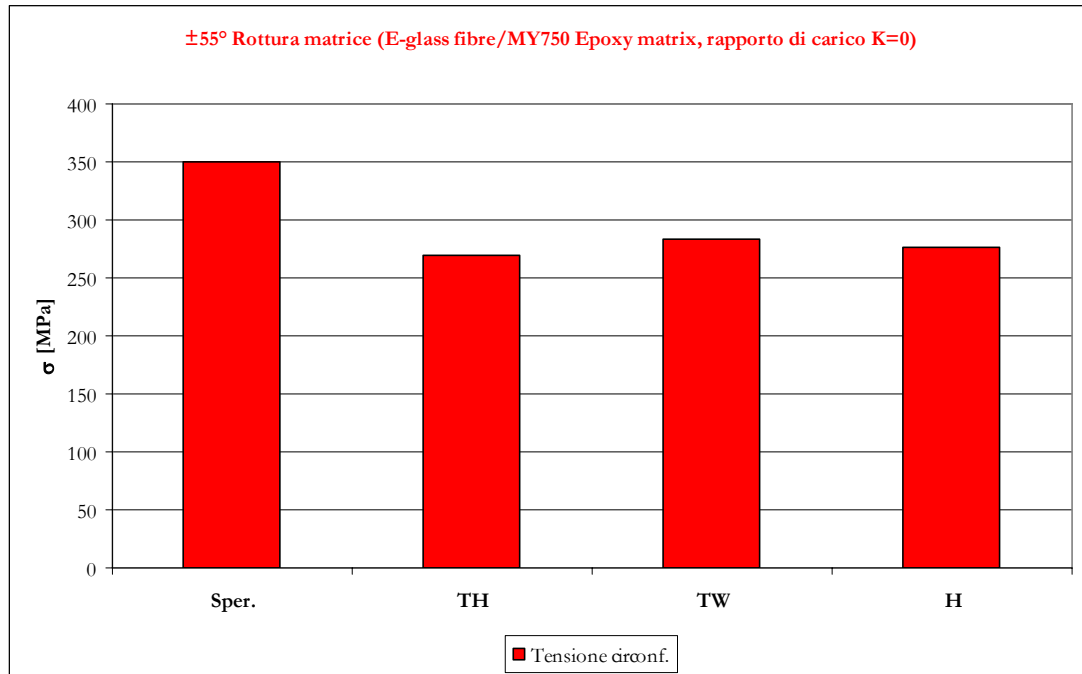


Figura. 6.16

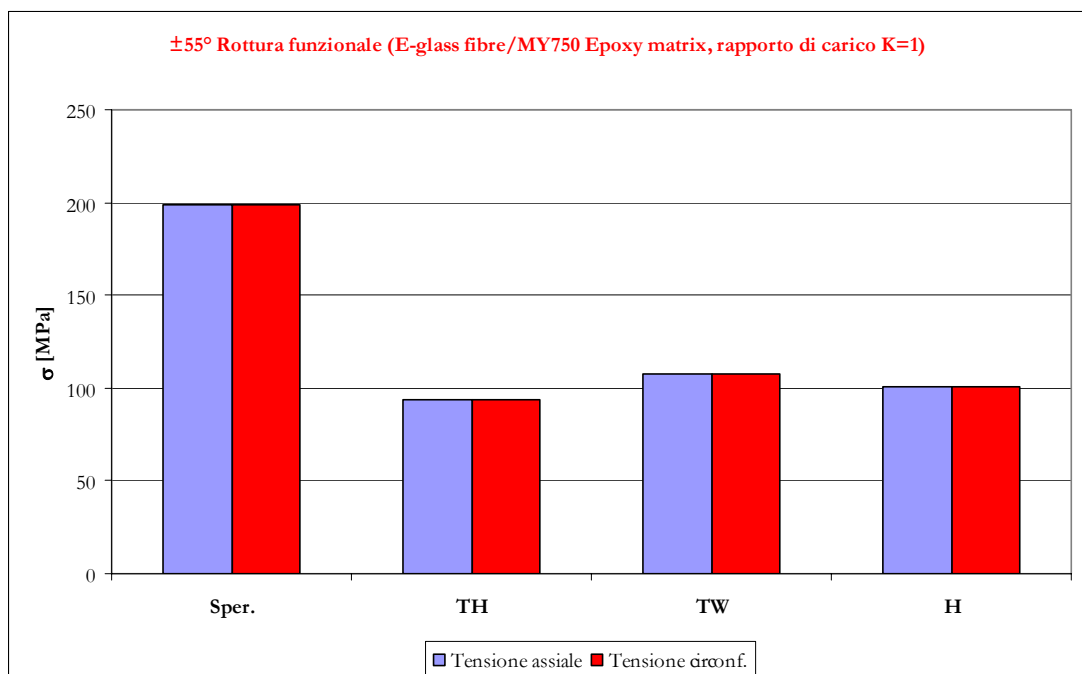
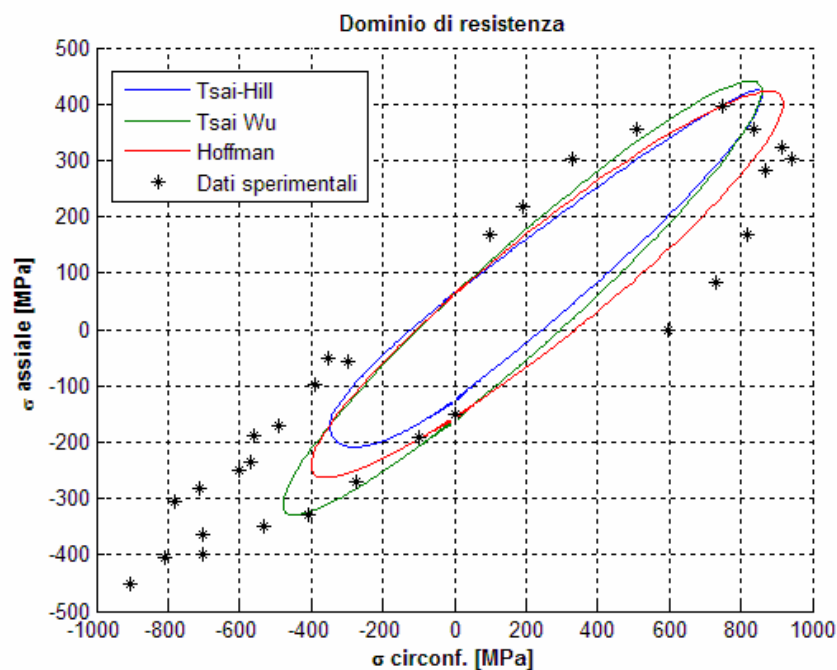
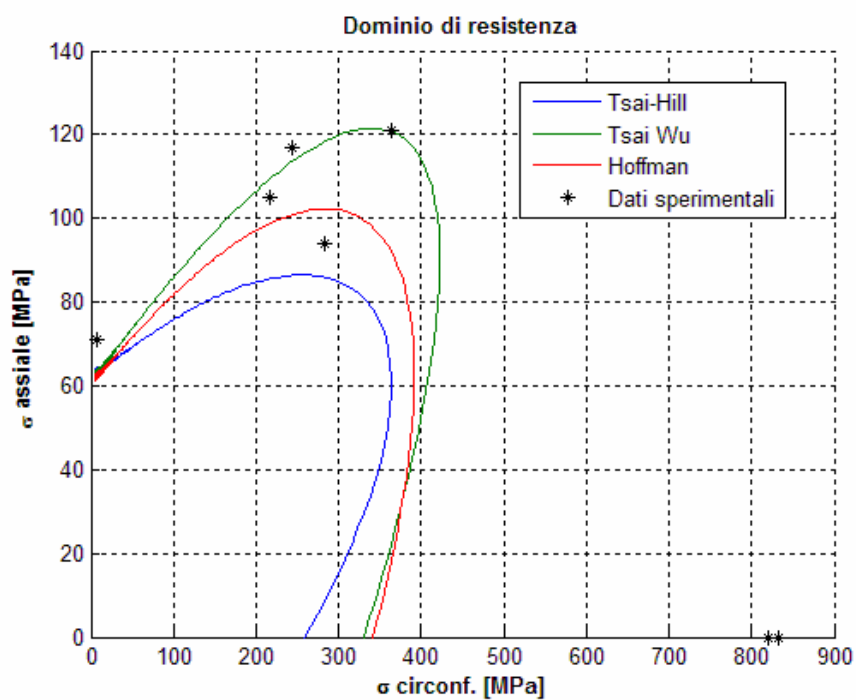
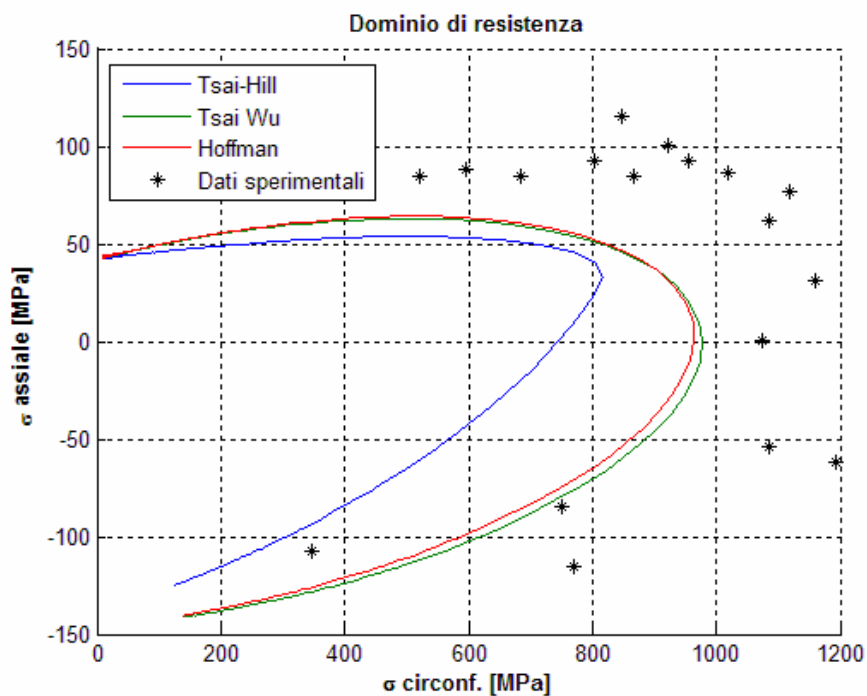


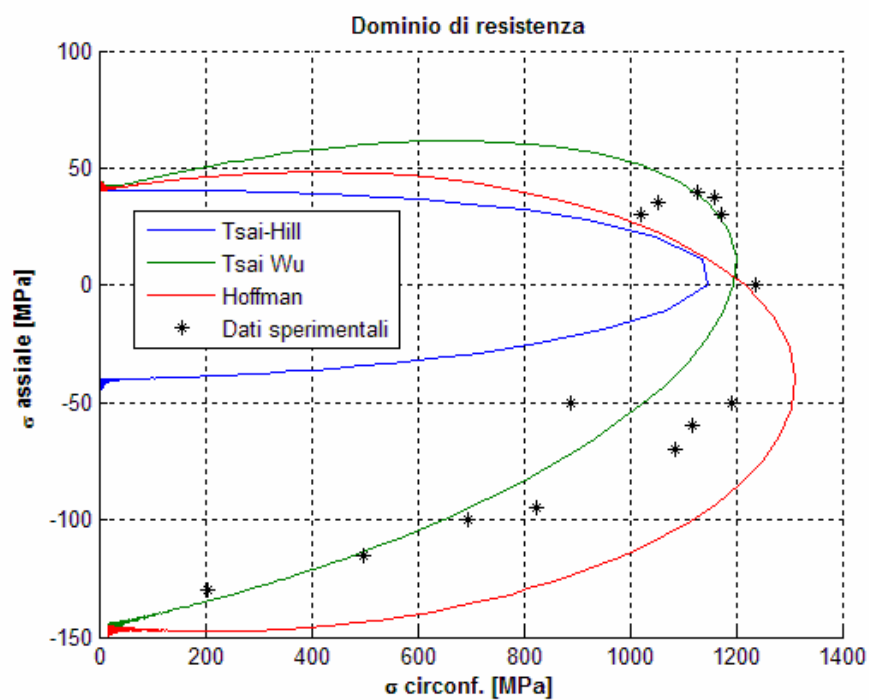
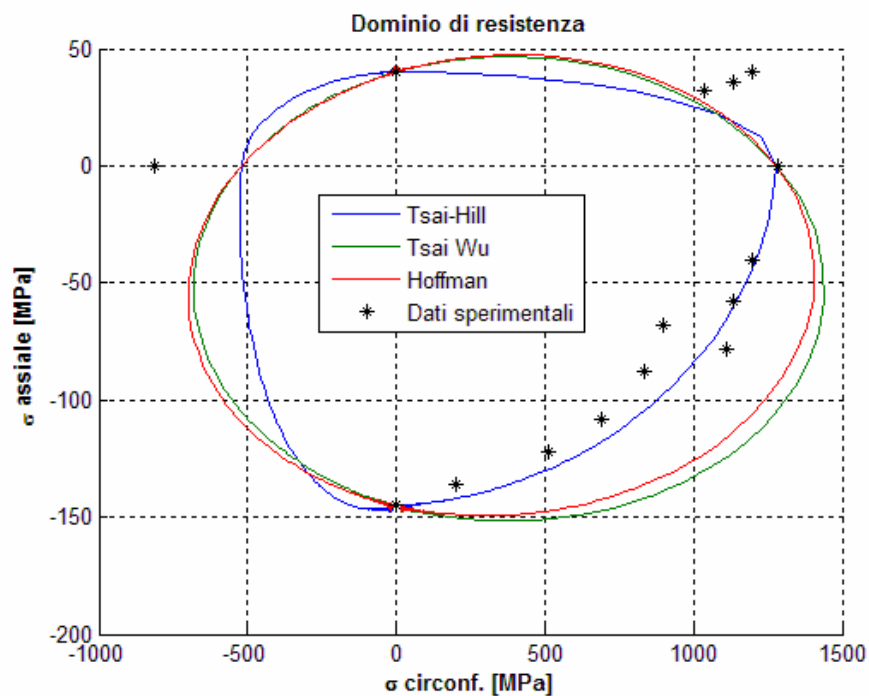
Figura 6.17

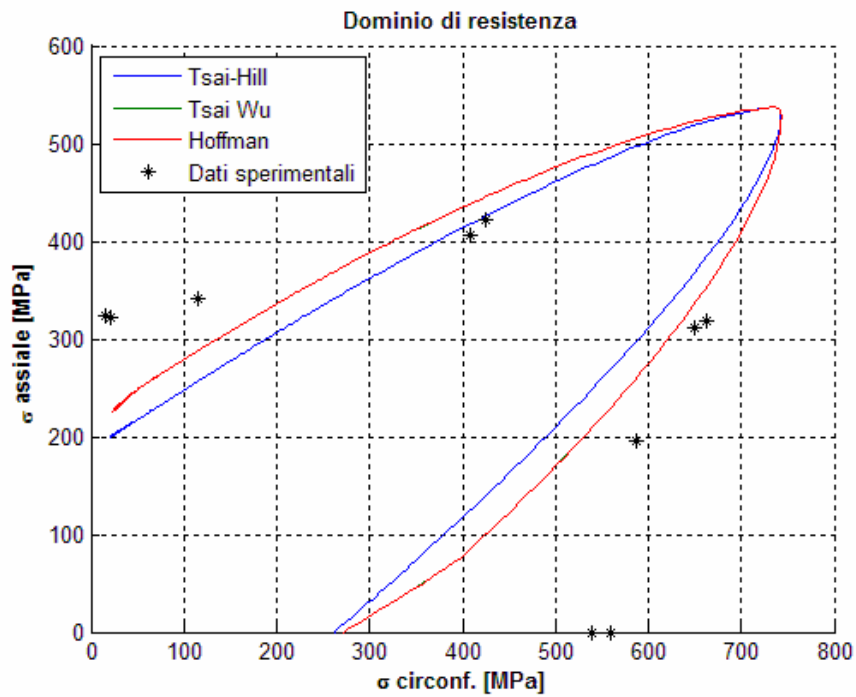
Vengono di seguito riportati i confronti relativi ai domini di resistenza calcolati, ottenuti facendo variare il rapporto di carico  $K$ , e i valori sperimentali delle tensioni di rottura corrispondenti. Ai fini del calcolo, nel codice sviluppato, sono stati inseriti i valori forniti dagli autori in merito alle proprietà meccaniche del composito in esame. Nelle figure successive si deduce un discreto accordo tra i dati calcolati e sperimentali. Infatti, i punti rappresentanti questi ultimi si trovano tendenzialmente all'esterno dei domini individuati dai criteri di resistenza in esame. Inoltre, è possibile rilevare una maggiore conservatività del criterio di *Tsai-Hill* rispetto agli altri.

**$\pm 55^\circ$  E-glass/MY750 Rottura fibre [16]**

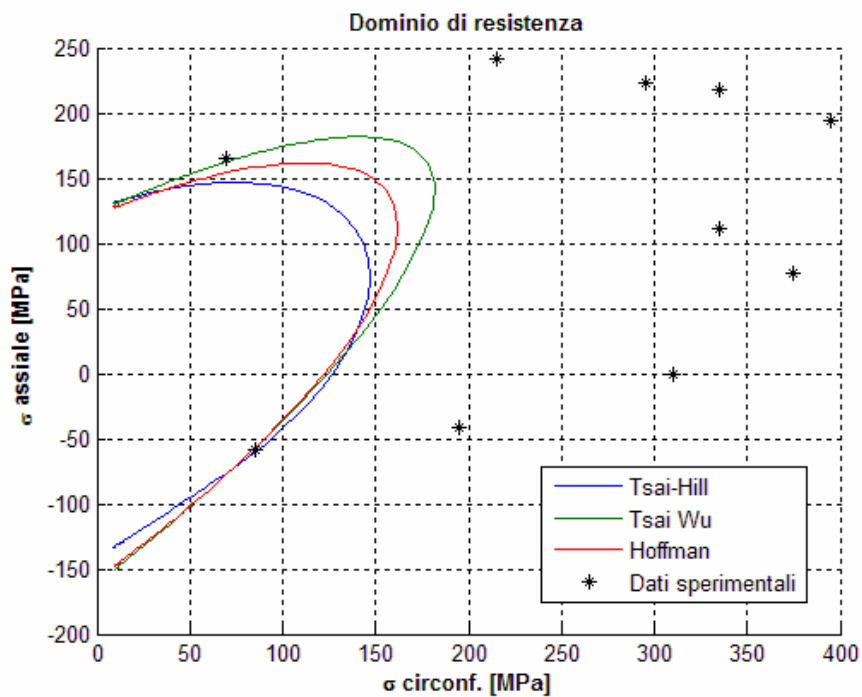
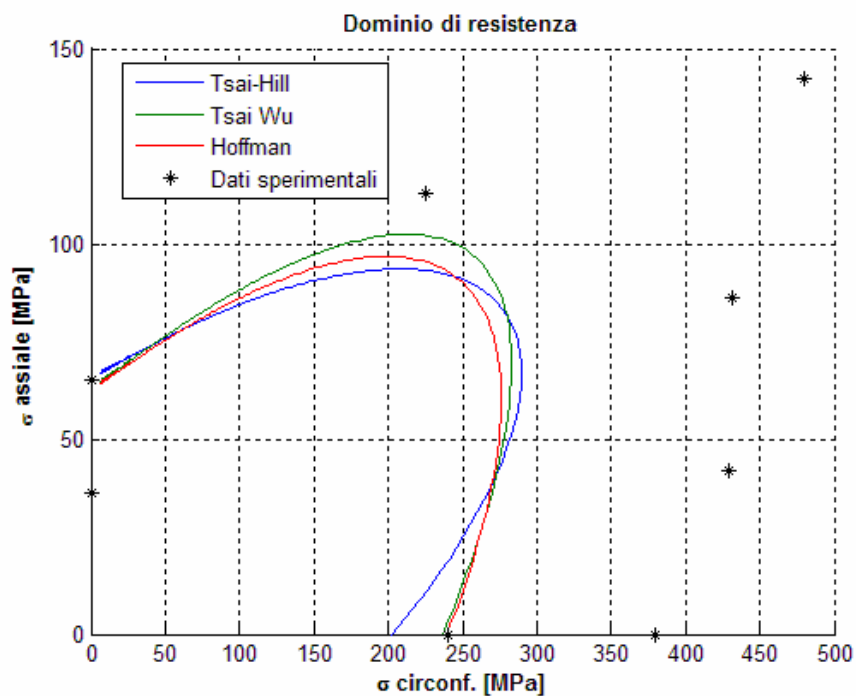


**$\pm 60^\circ$  E-glass/MY750 Rottura matrice [17]** **$\pm 75^\circ$  E-glass/MY750 Rottura matrice [18]**

**$\pm 85^\circ$  E-glass/MY750 Rottura matrice [18]** **$90^\circ$  E-glass/MY750 Rottura strutturale [19]**

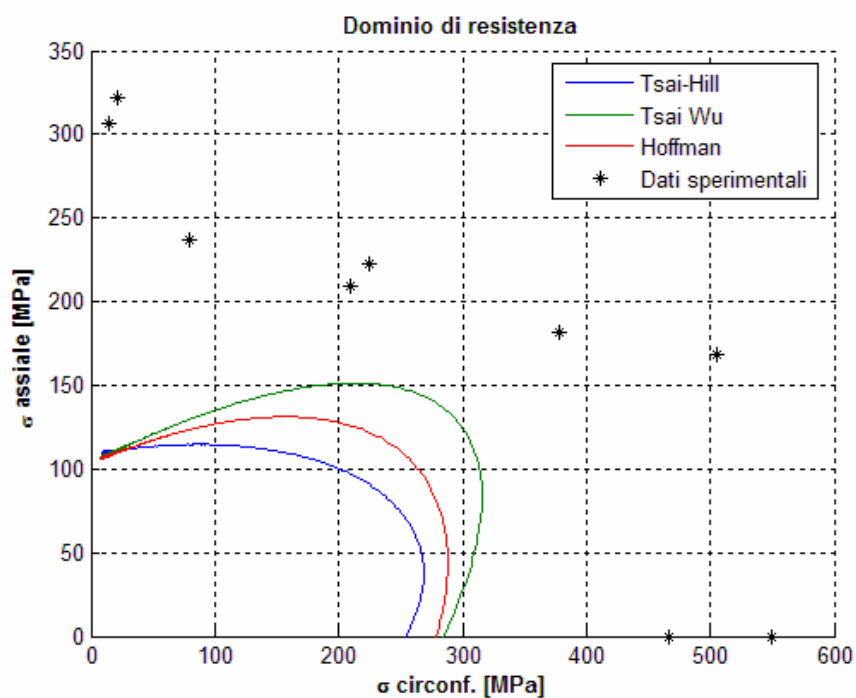
**60°/30°/60° E-glass/MY750 Rottura strutturale [17]**

Nelle prossime quattro figure si evidenzia, da parte di tutti i criteri, una eccessiva sicurezza nei confronti della rottura. Ciò si deduce dalla distanza dei valori sperimentali dai diversi domini individuati.

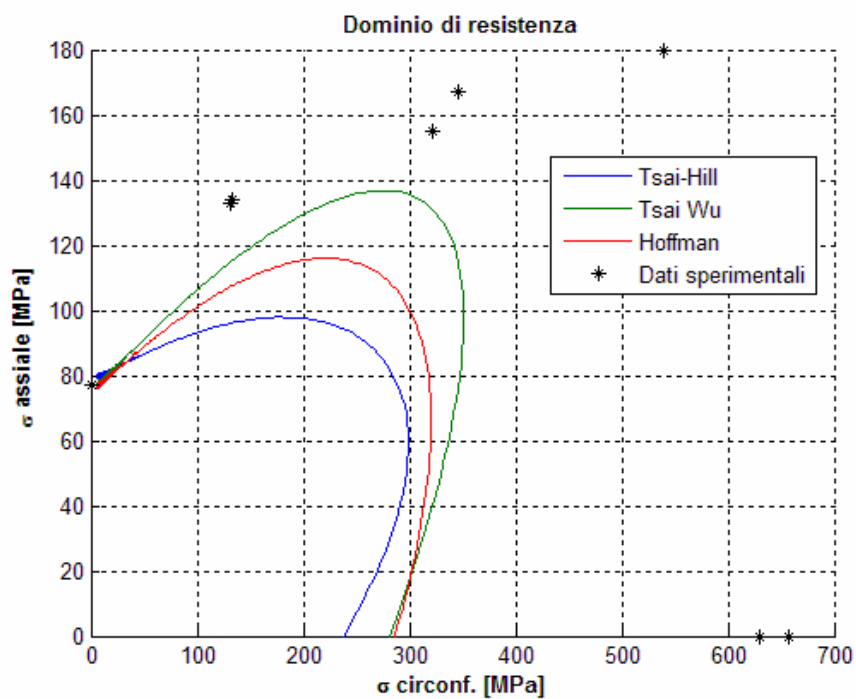
**$\pm 45^\circ$  E-glass/MY750 Rottura matrice [18]** **$\pm 55^\circ$  E-glass/MY750 Rottura matrice [20]**



## 60°/30°/60° E-glass/MY750 Rottura funzionale [17]



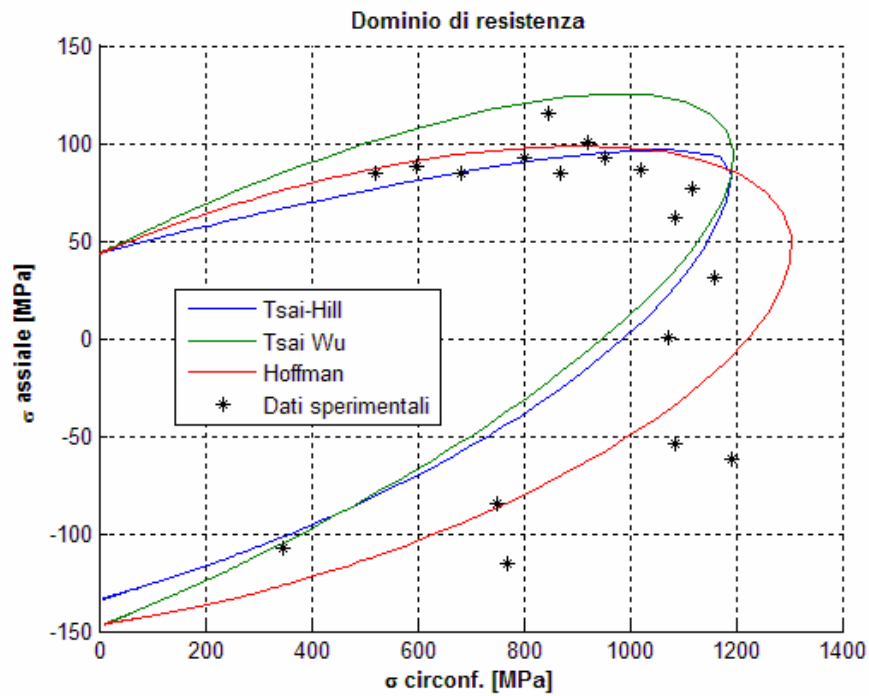
## 60°/45°/60° E-glass/MY750 Rottura funzionale [17]

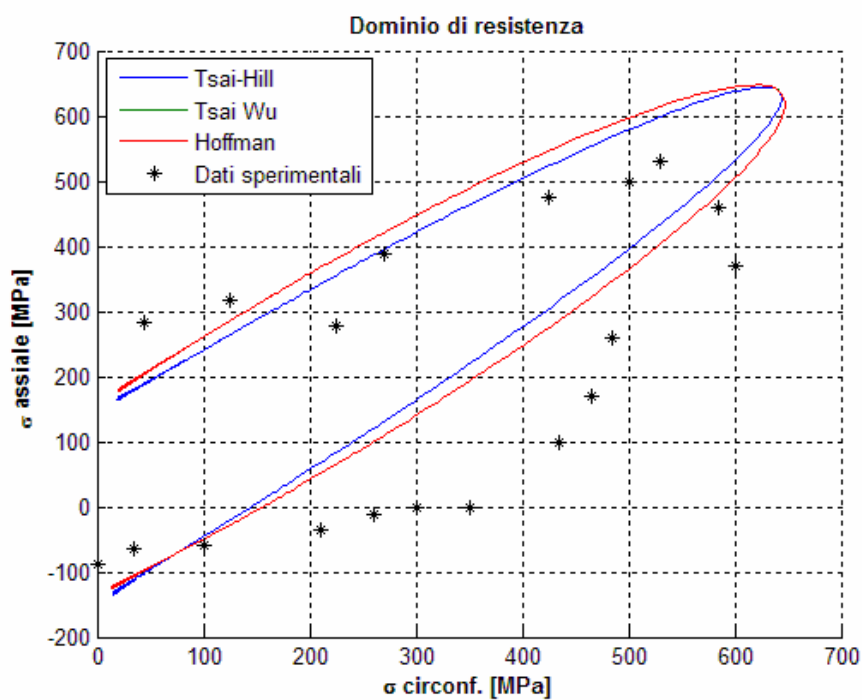
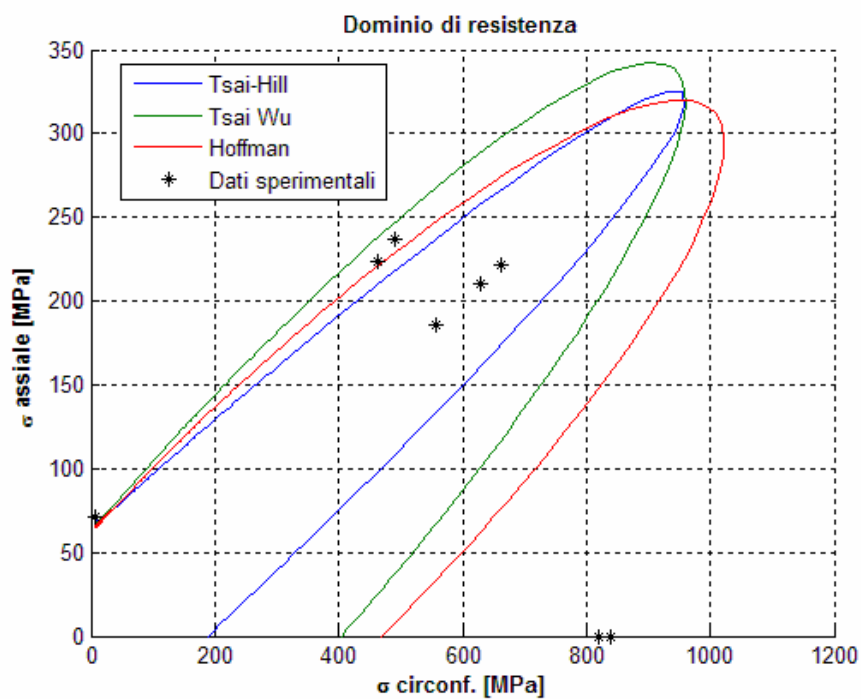


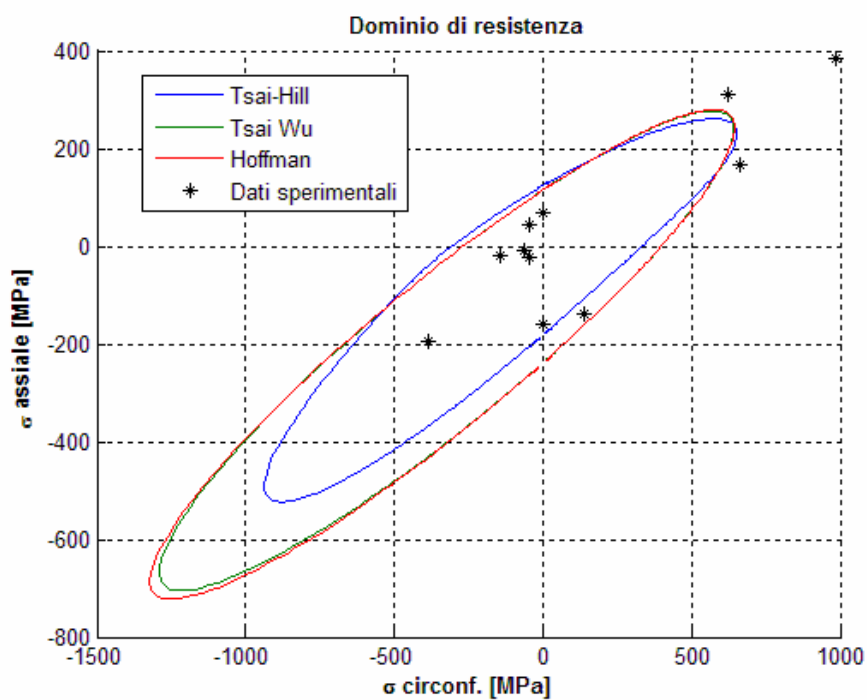
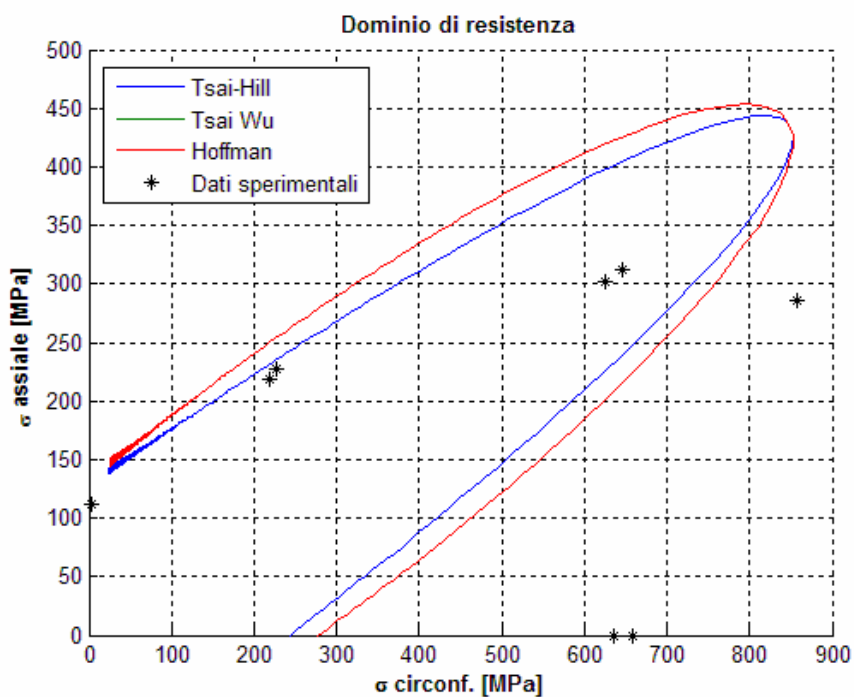
Nelle figure successive vengono esposti i casi in cui i domini di resistenza calcolati forniscono una parziale attendibilità rispetto a quanto sperimentalmente rilevato.

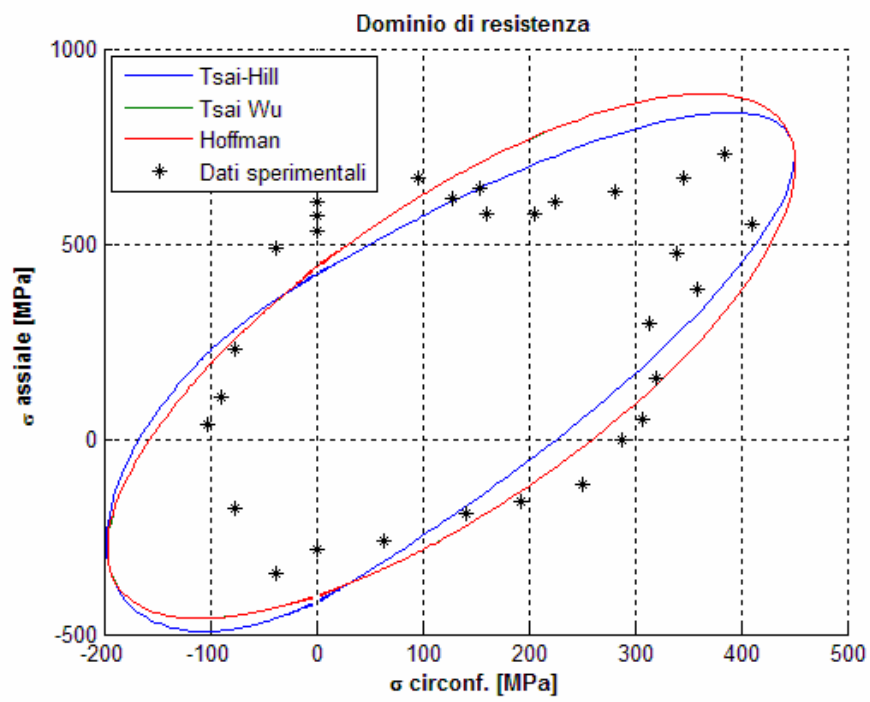
Infatti si può notare come i punti siano distribuiti, in alcuni casi prevalentemente, all'interno dei domini di sicurezza.

### $\pm 75^\circ$ E-glass/MY750 Rottura fibre [18]



**$\pm 45^\circ$  E-glass/MY750 Rottura fibre [18]** **$\pm 60^\circ$  E-glass/MY750 Rottura fibre [17]**

**$\pm 55^\circ$  carbon/epoxy Rottura strutturale [13]** **$60^\circ/45^\circ/60^\circ$  E-glass/MY750 Rottura strutturale [17]**

**60°/0°/60° E-glass/MY750 Rottura strutturale [19]**

## CONCLUSIONI

Le attività di ricerca sono state incentrate sulla realizzazione di tubi assialsimmetrici con angoli di avvolgimento a singola e doppia orientazione attraverso la tecnologia del Filament Winding. L'aspetto sperimentale è stato poi affiancato a quello analitico attraverso lo sviluppo di una metodologia di calcolo al fine di prevedere il comportamento a rottura di tubi in vetroresina realizzati mediante tale tecnologia. A tal proposito, sono stati studiati alcuni criteri di resistenza, ritenuti diffusamente idonei per materiali ortotropi, quali quelli di Tsai-Hill, Tsai-Wu e Hoffman basandosi su concetti di Teoria della Laminazione e di macromeccanica della lamina.

Da quanto esposto si può dedurre che i risultati ottenuti dai test condotti su provini realizzati in laboratorio sono in discreto accordo con quelli previsti dal codice di calcolo. Quanto affermato vale sia per i tubi con singolo avvolgimento variabile, sia per tubi con doppia orientazione.

Inoltre dagli stessi si evince una sostanziale omogeneità nelle previsioni dei criteri di resistenza presi in considerazione, salvo una leggera tendenza del criterio di Hoffman ad una maggiore sicurezza rispetto agli altri.

Per quanto concerne i modi rottura, dalle prove si è potuto constatare effettivamente che il danno alle fibre non si è verificato per ogni angolo di avvolgimento, ma per valori compresi in un intervallo intorno ai  $\pm 55^\circ$ . E' da rilevare, tra l'altro, che dai valori delle tensioni calcolate dal codice, la rottura funzionale si discosta notevolmente da quella strutturale per angoli di avvolgimento compresi tra i  $\pm 50^\circ$  e i  $\pm 60^\circ$ .

Quindi per orientazioni esterne a quest'ultimo intervallo, porsi in sicurezza rispetto alla rottura funzionale rappresenterebbe un atteggiamento cautelativo accettabile.

In merito al confronto con i dati sperimentali forniti dalla letteratura relativi a diversi compositi, a diverse condizioni di carico e a diversi modi di rottura, risulterebbe, considerando i risultati di test eseguiti su tubi aventi vari angoli di avvolgimento e soggetti alla sola pressione interna (analogamente a quanto simulato in vasca di scoppio sui tubi realizzati in laboratorio), un sufficiente accordo con i dati forniti dal

codice di calcolo relativamente a tutti i criteri di resistenza considerati, eccetto una tenue propensione del criterio di *Hoffman* ad essere più conservativo, in particolare per la rottura funzionale.

Inoltre, sempre circa i dati sperimentali reperiti in letteratura inerenti prove con coefficienti di carico variabile, tra gli andamenti rappresentanti i domini di resistenza reali e calcolati si denota una limitata accettabilità di questi ultimi relativamente alla rottura per cedimento della matrice. Gli stessi mostrano, senza significativi rilievi in efficacia di un singolo criterio di resistenza tra quelli considerati, una marcata cautela nella previsione del danno in misura superiore da parte del criterio di *Tsai-Hill* per lamine ad orientazione singola. Cautela che diviene eccessiva per laminati costituiti da lamine con diversi angoli di avvolgimento e che determinerebbe un inadeguato sfruttamento delle caratteristiche meccaniche del composito considerato. Per quanto attiene i dati calcolati nella circostanza di danno alle fibre (rottura strutturale), si nota, come per il caso della rottura della matrice, l'assenza di un criterio in grado di fornire risultati significativamente più vicini ai valori forniti dai dati sperimentali. In tale evenienza risulta che siano molto ridotti i margini di sicurezza dei domini di resistenza calcolati nei confronti delle tensioni di rottura rilevate sperimentalmente e che, in alcuni casi, i criteri esaminati prevedano tensioni di rottura del composito maggiori di quelle realmente riscontrate.

La parziale congruità dei dati sperimentali con quelli calcolati mediante l'algoritmo che, come evidenziato, utilizza i valori delle varie proprietà meccaniche del composito preso in esame fornite dall'autore stesso, potrebbe derivare da una intrinseca capacità dei criteri di resistenza considerati a contemplare in modo accettabile alcune situazioni di carico rispetto ad altre in cui forniscono risultati poco attendibili.

Un ulteriore motivo potrebbe essere addebitato alle difficoltà oggettive che si riscontrano nel caratterizzare un composito in termini di resistenza a trazione e compressione nelle sue diverse direzioni. Questo comporta una non completa corrispondenza delle suddette proprietà con quelle rilevate sperimentalmente in diverse condizioni di carico.

In conclusione, dallo studio fin qui affrontato, si può dedurre che tra i criteri di resistenza esaminati non si può indicare quello che in modo significativo risulti essere più idoneo a fornire valori in termini di tensioni di rottura più vicini a quelli rilevati in realtà. Ciò che ovviamente risulterebbe opportuno, a questo punto, è la

possibilità di valutare singolarmente ogni specifico caso e scegliere, conseguentemente, il criterio che, in base ad esperienze analoghe già svolte, ha dato i risultati migliori.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] - F. Mazzoleni , “Tecnologie dei materiali”, UTET.
- [2] - T.T.Chiao, E. E. Jessup, and L. Penn, “Screening of Epoxy System for High-Performance Filament-Wound Application”, 7th National Technical SAMPLE Conference, October 1975, pp. 167-76, Society for the Advancement of Material and Process Engineering, Covina, Ca.
- [3] - K. B. Turner, “Filament winding – Some Basic Principles”, Modern Plastics 31, 111 (December 1959)
- [4] - Soo-Yong Lee, Gorge S. Springer, “ Filament Winding Cylinders: I. Process Model”, Journal of Composite Materials, Vol.24-December 1990.
- [5] - J. Bai, G. Hu and P. Bompard, “Mechanical behaviour of  $\pm 55^\circ$  filament-wound glass-fibre/epoxy-resin tubes: II. Micromechanical model of damage initiation and the competition between different mechanisms”, Compos. Sci. Technol., Vol. 57, 1997, pp. 155-164.
- [6] - Robert M. Jones, “ Mechanics of composite materials”, Second Edition, Taylor & Francis.
- [7] – Stephen P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, “Theory of plates and shells”, Second Edition, Mc. Grow-Hill.
- [8] - W. Van Paepegem, J. Degrieck, “Calculation of damage-dependent directional failure indices from the Tsai-Wu static failure criterion”, Compos. Sci. Technol., Vol. 63, 2003, pp. 305-310.
- [9] - Zheng-Ming Huang, “A bridging model prediction of the ultimate strength of composite laminates subjected to biaxial loads”, Compos. Sci. Technol., Vol. 64, 2004, pp. 395-448.
- [10] - Kuo-Shih Liu & Stephen W. Tsai, “A progressive quadratic failure criterion for a laminate”, Compos. Sci. Technol., Vol. 58, 1998, pp. 1023-1032.
- [11] - Z. Kolakowski, “On some aspects of the modified Tsai-Wu criterion in thin-walled composite structures”, Compos. Sci. Technol., Vol. 41, 2003, pp. 357-374.

- [12] - Mark Walker, Ryan Smith, "A methodology to design fibre reinforced laminated composite structures for maximum strength", *Composites*, Vol. 34 part B, 2003, pp. 209-214.
- [13] - G. Gargiulo, M. Marchetti, A. Rizzo, "Prediction of failure envelopes of composite tubes subjected to biaxial loadings", *Acta Astronautica*, Vol. 39, No.5, 1996, pp. 355-368.
- [14] - T. Y. Kam, Y. W. Liu & F. T. Lee, "First-ply failure strength of laminated composite pressure vessels", *Composite Structures*, Vol. 38, No 1-4, 1997, pp. 65-70.
- [15] - M. Carrol, F. Ellyn, D. Kujawsky, A. S. Chiu, "The rate-dependent behaviour of  $\pm 55^\circ$  filament-wound glass-fibre/epoxy tubes under biaxial loading", *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 55, 1995, pp. 391-403.
- [16] - C. T. Sun, J. Tao, A.S. Kaddour, "The prediction of failure envelopes and stress-strain behaviour of composite laminates: comparison with experimental results", *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 62, 2002, pp. 1673-1682.
- [17] - P. Mertiny, F. Ellyn, A. Hothan, "An experimental investigation on the effect of multi-angle filament winding on the strength of tubular composite structures", *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 64, 2004, pp. 1-9.
- [18] - M. F. S. Al-Khalil, P. D. Soden, R. Kitching and M. J. Hinton, "The effect of radial stresses of thin-walled filament wound GRP composite pressure cylinders", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 38, 1996, pp. 97-120.
- [19] - M. J. Hinton, A.S. Kaddour, P. D. Soden, "A further assessment of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates: comparison with experimental evidence", *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 64, 2004, pp. 549-588.
- [20] - Jinbo Bai, Philippe Seeleuthner & Philippe Bompard, "Mechanical behaviour of  $\pm 55^\circ$  filament-wound glass-fibre/epoxy-resin tubes: I. microstructural analyses, mechanical behaviour and damage mechanism of composite tubes under pure tensile loading, pure internal pressure and combined loading", *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 57, 1997, pp. 141-15.

